ECG2

Exercices de colle de la semaine 11

Exercice 1

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. On pose $Z = |X|$. Montrer que Z suit une loi usuelle que l'on déterminera.
4. Soit X et Y deux variables indépendantes ayant f pour densité.
   Déterminer la loi de la variable $S = X + Y$.

Exercice 2

Pour des matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on définit $\langle A, B\rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. On note $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer que la famille (X, Y, Z, T) est orthogonale. En déduire une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Exprimer les coordonnées de A dans la base $\mathscr{B}$.
4. Montrer que la base canonique $\mathscr{C} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
5. Déterminer la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$.
