ECG2

# Exercices de colle de la semaine 12

## Groupe 3 - Colle Mercredi 4 Janvier de 12h à 13h, salle EM 109

### Exercice 1

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$.

1. Déterminer la valeur de $r$ pour laquelle $f_\lambda : x \to \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \lambda \\ \dfrac{r}{x^{k+1}} & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

   *Si $X$ admet pour densité $f_\lambda$, on dit que $X$ suit la loi de Pareto de paramètre $\lambda$ et $k$.*

2. Déterminer la fonction de répartition d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètres $\lambda$ et $k$.

3. En utilisant la méthode d'inversion, simuler une variable aléatoire suivant une loi de Pareto de paramètres $\lambda$ et $k$.

4. Soient $X_1, \cdots, X_k$ $k$ variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur [0,1]. On pose alors $Y = \dfrac{\lambda}{\max(X_1, \cdots, X_k)}$.

   (a) Montrer que $Y$ suit une loi de Pareto de paramètres $\lambda$ et $k$.

   (b) En déduire une autre méthode pour simuler la loi de Pareto.

---

### Exercice 2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. On cherche dans cet exercice à trouver toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^2 + M = A. \qquad (*)$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$.

2. Soit $M$ une solution de $(*)$.

   (a) Vérifier que $AM = MA$.

   (b) Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ et $X$ un vecteur propre associé. Montrer que $MX \in E_\lambda(A)$, et en déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $MX = \mu X$. Donner une relation entre $\lambda$ et $\mu$.

3. Déterminer toutes les solutions de $(*)$, et donner l'unique solution dont toutes les valeurs propres sont positives.

---

## Groupe 5 - Colle Jeudi 5 Janvier de 13h à 14h, salle EM 103

### Exercice 3

Soit $f$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2} e^{-|x|}$.

1. Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

2. Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$. Déterminer la fonction de répartition de $X$.

3. On pose $Z = |X|$. Montrer que $Z$ suit une loi usuelle que l'on déterminera.

4. Soit $X$ et $Y$ deux variables indépendantes ayant $f$ pour densité.
   Déterminer la loi de la variable $S = X + Y$.

## Exercice 4

Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer les endomorphismes $v$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v^2 = u$.

1. (a) Déterminer le rang de $M$ et calculer $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. En déduire les éléments propres de $u$.

   (b) Montrer que $u$ est diagonalisable et déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale.

2. Soit $v$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v^2 = u$.

   (a) Montrer que $v \circ u = u \circ v$. En déduire que les sous-espaces propres de $u$ sont stables par $v$.

   (b) Montrer que la matrice $N$ de $v$ dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale.
   En déduire les quatre seules matrices possibles pour $N$.

3. Montrer qu'il existe exactement quatre endomorphismes $v$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v^2 = u$ et déterminer leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.