ECG2

Exercices de colle de la semaine 13

Colle de 17h à 18h

Exercice 1

Soit $k \geq 2$ et $p_1, \ldots, p_k$ des réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ ayant pour composantes $X_1, \ldots, X_k$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, k]\!], \quad P(X = e_i) = p_i,$$

où $(e_1, \ldots, e_k)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.
On note $C(X)$ la matrice carrée d'ordre k dont le coefficient à la ligne i et à la colonne j est $\text{Cov}(X_i, X_j)$ pour tout $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$.

1. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, montrer que X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p_i.
2. Quelle est la loi de $X_1 + X_2$?
3. Calculer $\text{Cov}(X_1, X_2)$
4. Écrire la matrice $C(X)$.
5. On pose $A = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M = A\,{}^tU$. On note I la matrice identité d'ordre k.
   (a) Vérifier que M et $I - M$ sont des matrices de projecteurs.
   (b) Montrer que $C(X)$ et $I - M$ ont le même rang.
   (c) Déterminer le rang de $C(X)$.

Exercice 2

On note $E = \mathscr{C}^0([-1, 1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1, 1]$ et l'on pose pour tout f et g dans E :

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On définit les fonctions :

$$f_0 : x \mapsto |x|, \quad f_1 : x \mapsto \cos(2x), \quad f_2 : x \mapsto \sin(2x).$$

1. Justifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. On pose $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$.
   (a) Calculer la projection orthogonale de f_0 sur F.
   (b) En déduire la distance de f_0 à F.

Colle de 18h à 19h

Exercice 3

Soit f le fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\alpha}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f soit une densité de probabilités. *Dans la suite, on considère que α prend cette valeur.*

2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition F_X de X. X admet-elle une espérance ?

Dans la suite, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, et $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, admettant toutes f pour densité. On pose alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $Y_k = \min(X_1, \ldots, X_k)$.

3. Déterminer la fonction de répartition de Y_2, et en déduire que Y_2 est une variable à densité, dont on donnera une densité f_2.

4. Montrer que pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \dfrac{\pi}{2}$.

5. En déduire un équivalent de f_2 en $+\infty$.

6. Montrer que Y_2 admet une espérance. En déduire que pour tout $k \geq 2$, Y_k admet une espérance.

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}_{2n}[x]$. On pose, pour tous $P, Q \in E$,

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=-n}^{n} P(k)Q(k).$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. Montrer que si P est pair et Q impair, alors P et Q sont orthogonaux.

3. Déterminer, en fonction de n, les valeurs de a et b qui rendent minimale l'expression $\|x^2 - ax - b\|^2$.
