ECG2

Exercices de colle de la semaine 14

Colle de 17h à 18h

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on considère F le sous-espace vectoriel défini par :

$$\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y-z=0\}.$$

On détermine la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale p sur F par deux méthodes.

1. **Méthode 1.**
   (a) Déterminer une base orthonormale de F.
   (b) Déterminer $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(p)$.
2. **Méthode 2.**
   (a) Déterminer une base orthonormale de $F^{\perp}$.
   (b) On note q la projection orthogonale sur $F^{\perp}$. Déterminer $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(q)$.
   (c) En déduire $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(p)$.

Exercice 2

1. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n : x \mapsto \begin{cases} 1-\cos(2n\pi x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

   Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une densité de probabilité.

2. On considère maintenant une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires ayant toutes f_n comme densité.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition F_{X_n} de X_n.
   (b) En déduire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on donnera la loi.

Colle de 18h à 19h

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier qu'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$ en posant :

$$\langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Établir l'existence de réels $(p_0,p_1,\dots,p_n)$ (on précisera p_0) tels que :

$$(x-1)(x-2)\dots(x-n) = p_0 + \sum_{k=1}^{n} p_k(x+1)(x+2)\dots(x+k).$$

3. Vérifier que $P(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ est orthogonal au sous-espace vectoriel $\text{Vect}(x, x^2, \ldots, x^n)$.

   En déduire la distance du polynôme 1 au sous-espace vectoriel $\text{Vect}(x, x^2, \ldots, x^n)$.

4. Déterminer de même la distance de x^n au sous-espace vectoriel $\text{Vect}(1, x, \ldots, x^{n-1})$.

Exercice 4

Soit σ un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \frac{n^2 x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{n^2 x^2}{2\sigma^2}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une densité de probabilité.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densité f_n.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que X_n admet une espérance et la déterminer.
   (c) Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable constante égale à 0.
   (d) Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable constante égale à 0.
