Colle 1. Louise EQUOY

Question de cours. Loi faible des grands nombres.

Exercice 1

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y) = e^x(x + y^2 + e^x)$. On considère également la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1 + t + 2e^t$.

1. Montrer que g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et calculer ses dérivées partielles.
2. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$. Justifier que $\alpha \in [-2, -1]$.
3. En déduire que g possède un unique point critique, que l'on exprimera en fonction de α.
4. En remarquant que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g(x,y) \geq g(x,0)$, montrer que g possède un minimum global.

Exercice 2

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toute la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

1. Montrer que Y_n suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
2. Montrer que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable que l'on précisera.
3. Montrer qu'il s'agit également d'une convergence en probabilité.

Colle 2. Julien GOGNEAU

Question de cours. Condition nécessaire d'extremum.

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et qu'il existe un réel λ_n tel que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X_n = k) = \lambda_n k.$$

1. (a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Calculer λ_n.
   (b) Étudier la convergence en loi de la suite (X_n) de variables aléatoires.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F_n de Y_n.
   (b) Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable Y dont on précisera la fonction de répartition.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f : (x,y) \mapsto \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Déterminer les extrema de f.

Colle 3. Justine MASCARO

Question de cours. Convergence en loi de (X_n) lorsque $X_n \hookrightarrow \mathscr{E}(n)$ puis $X_n \hookrightarrow \mathscr{N}(n,1)$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^2 - 3xy + 3y^2 + 1.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puis établir qu'elle possède un seul point critique.
2. Développer $\left(x - \dfrac{3}{2}y\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2$ puis conclure qu'en ce point, f admet un minimum global.

Exercice 6

1. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n : x \mapsto \begin{cases} 1 - \cos(2n\pi x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
   Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une densité de probabilité.
2. On considère maintenant une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires ayant toutes f_n comme densité.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition F_{X_n} de X_n.
   (b) En déduire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on donnera la loi.
