ECG2

Exercices de colle de la semaine 15

Colle de 17h à 18h

Exercice 1

Soit (p_n) une suite de réels appartenant à $]0,1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p_n.

1. On suppose que (p_n) converge vers 1.
   (a) Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).
   (b) La suite (X_n) converge-t-elle en probabilité ?
2. On suppose que (p_n) converge vers 0.
   (a) Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).
   (b) On pose $Y_n = p_n X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite en loi de la suite $(p_n X_n)$?

Exercice 2

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + 2x^2 + y^2 - 4xy + 8x - 4y + 2$.

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.
2. Montrer que f admet exactement trois points critiques : $(0, 2)$, et deux autres points notés α et β.

   Justifier que f n'admet pas d'extremum en $(0, 2)$ et que $f(\alpha) = f(\beta)$.
3. On souhaite étudier la nature des deux points critiques. Pour cela, on cherche à déterminer le signe de $g(x, y) = f(x, y) - f(\alpha)$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que $y \mapsto g(x, y)$ est un polynôme de degré 2, et calculer son discriminant, noté $\Delta(x)$.
   (b) Montrer que la fonction Δ est de signe constant.
   (c) Conclure.

Colle de 18h à 19h

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = (x + z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$.

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$.
2. Montrer que f possède un unique point critique $A \in \mathbb{R}^3$ que l'on déterminera. Calculer $f(A)$.
3. Montrer que si $x \geq 0$, alors $f(x, y, z) \geq 0$, et que si $x \leq 0$, alors $f(x, y, z) \geq xe^x$.
4. Déterminer le minimum de la fonction $x \mapsto xe^x$, et en déduire que f atteint son minimum en A.

Exercice 4

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toute la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

1. Montrer que Y_n suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
2. Montrer que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable que l'on précisera.
3. Montrer qu'il s'agit également d'une convergence en probabilité.
