ECG2

Exercices de colle de la semaine 16

Colle de 17h à 18h

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f:(x,y)\mapsto \dfrac{-3y}{x^2+y^2+1}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Déterminer les extrema de f.

Exercice 2

Soit $f:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_n[x]$ défini par $f(P)=(x^2-1)P''+3xP'$.

1. Montrer que $(P|Q)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
2. (a) Montrer que pour tout $P,Q\in\mathbb{R}_n[x]$, $(P|Q)=\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t$.

   (b) En déduire que f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[x]$. f est-il diagonalisable ?
3. Déterminer les valeurs propres de f. f est-il un automorphisme ?
4. On suppose dans cette question que $n=2$. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[x]$ formée de vecteurs propres de f.

Colle de 18h à 19h

Exercice 3

Soit $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y)=e^x(x+y^2+e^x)$. On considère également la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=1+t+2e^t$.

1. Montrer que g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et calculer ses dérivées partielles.
2. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha)=0$. Justifier que $\alpha\in[-2,-1]$.
3. En déduire que g possède un unique point critique, que l'on exprimera en fonction de α.
4. En remarquant que pour tout $y\in\mathbb{R}$, $g(x,y)\geq g(x,0)$, montrer que g possède un minimum global.

Exercice 4

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
   Montrer que si la forme quadratique associée à M est strictement positive alors les valeurs propres de M sont toutes strictement positives.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^1 P(t)t^k\,\mathrm{d}t\right)X^k$.

   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Écrire la matrice M de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Justifier que M est diagonalisable.

(c) Pour $U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, montrer que ${}^tUMU = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} u_k t^k\right)^2 \mathrm{d}t$.

(d) En déduire que toutes les valeurs propres de φ sont strictement positives.