Colle 1. Elena Marsoudet

Question de cours. Si f est symétrique, une famille de vecteurs propres de f associée à des valeurs propres distinctes est orthogonale.

Exercice 1

On considère n variables aléatoires réelles ($n \geq 2$) indépendantes $X_1, \ldots, X_n$, de même loi de densité :

$$f_\theta : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3} & \text{si } x \in [0, \theta], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où θ est un paramètre inconnu strictement positif. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. (a) Calculer $E(S_n)$. En déduire l'expression, en fonction de S_n, d'un estimateur S_n' de θ sans biais.

   (b) Calculer $V(S_n')$. S_n' est-il un estimateur convergent de θ ?

2. (a) Montrer que T_n est une variable à densité, et en déterminer une densité.

   (b) Calculer $E(T_n)$. Construire à partir de T_n un estimateur T_n' sans biais de θ.

   (c) Calculer $V(T_n')$. T_n' est-il convergent en tant qu'estimateur de θ ?

3. Comparer les estimateurs S_n' et T_n'.

Exercice 2

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA \times A = {}^tB \times B$.

1. Montrer que A et B ont même noyau.

2. On suppose B inversible. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale U telle que $A = U \times B$.

Colle 2. Clément Noir

Question de cours. f est symétrique si, et seulement si, sa matrice dans une b.o.n. est symétrique.

Exercice 3

On considère un espace euclidien $(E, (|))$ de dimension $n \geq 2$.
On note $T(E)$ l'ensemble des endomorphismes u de E qui sont symétriques, de rang inférieur ou égal à 1 et tels que pour tout $x \in E, (u(x) \mid x) \geq 0$.

1. Si $a \in E$, on note u_a l'application de E dans E qui à tout vecteur x de E associe $u_a(x) = (a \mid x)a$.

   (a) Montrer que pour tout $a \in E, u_a \in T(E)$.

   (b) Si a est un vecteur non nul de E, préciser les valeurs propres et sous-espaces propres de u_a.

2. Soit u un élément non nul de $T(E)$ et b un vecteur non nul de $\operatorname{Im} u$.

   (a) Montrer que b est vecteur propre de u associé à une valeur propre $\mu \geq 0$.

   (b) Montrer que pour tout vecteur x de $E, u(x) = \frac{\mu}{\|b\|^2}(x \mid b)b$.

   (c) En déduire qu'il existe un vecteur a de E tel que $u = u_a$.

   (d) L'application φ de E dans $T(E)$ qui à a associe $\varphi(a) = u_a$ est-elle surjective? injective ?

3. Soit a un vecteur non nul de E et f un endomorphisme de E.

   (a) Pour $x \in E$, expliciter $f \circ u_a(x)$.

   (b) Montrer que $f \circ u_a$ est symétrique si et seulement si a est vecteur propre de f.

   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f \circ u_a$ appartienne à $T(E)$.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in E^2$ pour que $u_a \circ u_b = u_b \circ u_a$.

Exercice 4

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la même loi d'espérance μ et de variance σ^2. On définit deux estimateurs de μ en posant :

$$T_n = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) - \frac{X_1 - X_2}{2}.$$

Lequel de ces deux estimateurs est le meilleur ?

Colle 3. Samy Noui

Question de cours. Condition suffisante de convergence pour un estimateur.

Exercice 5

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que si la forme quadratique associée à M est strictement positive alors $\operatorname{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose $\varphi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^n \left(\int_0^1 P(t)t^k \,\mathrm{d}t\right) x^k$.

   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

   (b) Écrire la matrice M de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$. Justifier que M est diagonalisable.

   (c) Pour $U = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, montrer que
   $${}^tUMU = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n u_k t^k\right)^2 \mathrm{d}t.$$

   (d) En déduire que toutes les valeurs propres de φ sont strictement positives.

Exercice 6

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On sait que N est au moins égal à deux, mais on ne connaît pas sa valeur exacte et on cherche à l'estimer. Pour cela, on effectue n tirages avec remise ($n \in N^*$) et on note Z_k le numéro de la boule obtenue au k-ième tirage ($1 \leq k \leq n$). On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n Z_k$.

   (a) Donner l'expression, en fonction de M_n, d'un estimateur T_n de N sans biais.

   (b) Montrer que cet estimateur est convergent.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \max(Z_1, \ldots, Z_n)$.

   (a) Montrer que pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $[\![1, N]\!]$: $\quad E(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^N P(Y \geq k)$.

   (b) Calculer $E(S_n)$. En déduire : $\quad E(S_n) \geq N - \dfrac{N}{n+1}$.

   (c) L'estimateur S_n est-il sans biais ? Que dire lorsque n est grand ?
