ECG2

Exercices de colle de la semaine 17

Colle de 17h à 18h

Exercice 1

Soit θ un paramètre réel inconnu et X une variable aléatoire à densité. On dit que X suit la loi $\mathscr{L}(\theta)$ si une densité f de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}.$$

Soit n un entier naturel. On considère un $(2n+1)$-échantillon $(X_1, \dots, X_{2n+1})$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi $\mathscr{L}(\theta)$.

1. (a) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.
   (b) En déduire que la variable aléatoire $X - \theta$ suit une loi $\mathscr{L}(0)$.
   (c) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $X - \theta$, puis celles de X.

2. On pose $\overline{X_{2n+1}} = \dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\sum_{i=1}^{2n+1} X_i$.
   (a) Montrer que $\overline{X_{2n+1}}$ est un estimateur sans biais du paramètre θ.
   (b) L'estimateur $\overline{X_{2n+1}}$ est-il convergent ?

Exercice 2

Soit $m \geq 3$ et soit $A \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $n \geq 2$ tel que $A^n = {}^tA$.

1. Montrer que $A^{n^2} = A$.
2. On pose $B = A^{n+1}$. Montrer que B est une matrice symétrique et que $B^n = B$.
3. Que peut-on en déduire des valeurs propres de B ?
4. On suppose que -1 est valeur propre de B, et soit V un vecteur propre associé. En calculant de deux manières différentes ${}^tVBV$, montrer qu'on aboutit à une contradiction et donc que -1 n'est pas valeur propre de B.
5. Montrer que B est la matrice d'un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^m$.

Colle de 18h à 19h

Exercice 3

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On sait que N est au moins égal à deux, mais on ne connaît pas sa valeur exacte et on cherche à l'estimer. Pour cela, on effectue n tirages avec remise ($n \in N^*$) et on note Z_k le numéro de la boule obtenue au k-ième tirage ($1 \leq k \leq n$). On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k$.
   (a) Donner l'expression, en fonction de M_n, d'un estimateur T_n de N sans biais.
   (b) Montrer que cet estimateur est convergent.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \max(Z_1, \dots, Z_n)$.
   (a) Montrer que pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\{1, \dots, N\}$, on a la relation :
   $$E(Y) = \sum_{k=1}^{N} P(Y \geq k).$$
   (b) Calculer $E(S_n)$. En déduire l'inégalité : $E(S_n) \geq N - \dfrac{N}{n+1}$.
   (c) L'estimateur S_n est-il sans biais ? Que dire lorsque n est grand ?

Exercice 4

Toutes les matrices de cet exercice sont réelles d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Soit R une matrice symétrique réelle telle que $\mathrm{Sp}(R) \subset \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Justifier l'existence d'une matrice P orthogonale et D diagonale à coefficients diagonaux tous strictement positifs, telles que :
   $${}^tPRP = D.$$
   (b) Montrer qu'il existe une matrice E diagonale à coefficients diagonaux tous strictement positifs, telle que $E^2 = D$.
   (c) En déduire qu'il existe une matrice symétrique inversible S telle que $S^2 = R$.
2. Soit Q une matrice orthogonale et S une matrice symétrique. On pose $A = QS$. Exprimer ${}^tAA$ en fonction de S.
3. Soit A une matrice inversible.
   (a) Vérifier que ${}^tAA$ est une matrice symétrique inversible.
   (b) Justifier que pour tout vecteur X non nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit scalaire $\langle {}^tAAX, X \rangle$ est strictement positif. En déduire que $\mathrm{Sp}({}^tAA) \subset \mathbb{R}_+^*$.
   (c) Montrer qu'il existe Q une matrice orthogonale et S une matrice symétrique telles que $A = QS$.
