ECG2

Exercices de colle de la semaine 18

Colle de 17h à 18h

Exercice 1

On considère n variables aléatoires réelles ($n \geq 2$) indépendantes $X_1, \dots, X_n$, de même loi de densité :

$$f_\theta : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3} & \text{si } x \in [0, \theta], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où θ est un paramètre inconnu strictement positif. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. (a) Calculer $E(S_n)$. En déduire l'expression, en fonction de S_n, d'un estimateur S_n' de θ sans biais.
   (b) Calculer $V(S_n')$. S_n' est-il un estimateur convergent de θ ?
2. (a) Montrer que T_n est une variable à densité, et en déterminer une densité.
   (b) Calculer $E(T_n)$. Construire à partir de T_n un estimateur T_n' sans biais de θ.
   (c) Calculer $V(T_n')$. T_n' est-il convergent en tant qu'estimateur de θ ?
3. Comparer les estimateurs S_n' et T_n'.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \exp\left(n + 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer le gradient de f, et en déduire que f possède un unique point critique $\hat{x}$.
3. Calculer la hessienne $\nabla^2 f(\hat{x})$ de f en ce point critique.
4. En déduire que f admet un minimum local en $\hat{x}$.
5. Ce minimum local est-il un minimum global ?

Colle de 18h à 19h

Exercice 3

Soit a, b,et c trois réels strictement positifs et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ c & \text{si } x \in [0, a] \\ \frac{b}{x^4} & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

1. Déterminer b et c en fonction de a pour que f soit une densité de probabilité continue sur $\mathbb{R}_+$.

   On suppose b et c ainsi définis dans la suite de l'exercice et X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densité f.

   Donner une allure de la représentation de f.
2. Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N}^*$, X admet-elle un moment d'ordre k ?
3. Déterminer l'espérance et la variance de X si elles existent.

4. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On pose :

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

   (a) Construire à partir de T_n un estimateur S_n sans biais de a.

   (b) Calculer $V(S_n)$. S_n est-il un estimateur convergent de a ?

Exercice 4

On définit la fonction f sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]-1, +\infty[$ par :

$$\forall (x, y, z) \in U, \quad f(x, y, z) = x \ln(1 + z) + (y - 1)^2 (z - 1) + 2z.$$

1. Donner la nature topologique de U.
2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
3. Montrer que f admet un unique point critique A sur U que l'on déterminera.
4. Déterminer la hessienne de f au point A.
5. Le point A est-il un extremum local pour la matrice f ?
