Colle 1. Jules Barthélémy

Question de cours. Condition suffisante d'extremum global sur un ouvert convexe.

Exercice 1

1. Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la même loi d'espérance μ et de variance σ^2. On définit deux estimateurs de μ en posant :

$$T_n = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \frac{X_1 - X_2}{2}.$$

   Lequel de ces deux estimateurs est le meilleur ?

2. Soient T_1 et T_2 deux estimateurs de θ, sans biais et indépendants. Pour tout a réel, on pose $U_a = aT_1 + (1-a)T_2$.

   (a) U_a est-il un estimateur sans biais de θ ?

   (b) Parmi tous les U_a, lequel doit-on privilégier ?

Exercice 2

On définit la fonction f sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]-1, +\infty[$ par :

$$\forall (x, y, z) \in U, \quad f(x, y, z) = x\ln(1+z) + (y-1)^2(z-1) + 2z.$$

1. Donner la nature topologique de U.
2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
3. Montrer que f admet un unique point critique A sur U que l'on déterminera.
4. Déterminer la hessienne de f au point A.
5. Le point A est-il un extremum local pour la matrice f ?

Colle 2. Nathan Dos Santos

Question de cours. Condition suffisante d'extremum local sur un ouvert.

Exercice 3

Soit Z une variable aléatoire discrète d'espérance $E(Z) = \theta$ ($\theta \in \mathbb{R}^*$) et de variance $V(Z) = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose d'un n-échantillon $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que Z, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

On pose : $\overline{Z_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} Z_j$. On suppose que θ est inconnu.

1. $\overline{Z_n}$ est-il un estimateur sans biais et convergent de θ ?
2. Soient $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, des réels non nuls et $Y_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta_j Z_j$.

   (a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels $\beta_1, \dots, \beta_n$ pour que Y_n soit un estimateur sans biais de θ.

   (b) Calculer $V(Y_n - \overline{Z_n})$. En déduire que $V(\overline{Z_n}) \leq V(Y_n)$. Interpréter ce résultat.

3. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des réels non nuls, et $U_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j Z_j$.

   On suppose que U_n est un estimateur sans biais de θ, et que $V_\theta(U_n) = V_\theta(\overline{Z_n})$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}^*$.
   Montrer que $U_n = \overline{Z_n}$ avec une probabilité égale à 1. Interpréter ce résultat.

Exercice 4

Dans cet exercice, on désignera par une lettre minuscule un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et par la même lettre majuscule le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par $\varphi(x, y) = {}^tXAY$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On considère un vecteur b de $\mathbb{R}^n$ et on définit l'application f sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}{}^tXAX - {}^tBX$.

1. Montrer que A est symétrique et que les valeurs propres de A sont strictement positives.
2. (a) Montrer que f admet un unique point critique, donné par $X_0 = A^{-1}B$.

   (b) Vérifier qu'en ce point critique, f possède un minimum local.

Colle 3. Lucien Malfroy

Question de cours. Condition suffisante de convergence pour un estimateur.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \exp\left(n + 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer le gradient de f, et en déduire que f possède un unique point critique $\hat{x}$.
3. Calculer la hessienne $\nabla^2 f(\hat{x})$ de f en ce point critique.
4. En déduire que f admet un minimum local en $\hat{x}$.

Exercice 6

On considère n variables aléatoires réelles ($n \geq 2$) indépendantes $X_1, \dots, X_n$, de même loi de densité :

$$f_\theta : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3} & \text{si } x \in [0, \theta], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où θ est un paramètre inconnu strictement positif. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. (a) Calculer $E(S_n)$. En déduire l'expression, en fonction de S_n, d'un estimateur S_n' de θ sans biais.

   (b) Calculer $V(S_n')$. S_n' est-il un estimateur convergent de θ ?

2. (a) Montrer que T_n est une variable à densité, et en déterminer une densité.

   (b) Calculer $E(T_n)$. Construire à partir de T_n un estimateur T_n' sans biais de θ.

   (c) Calculer $V(T_n')$. T_n' est-il convergent en tant qu'estimateur de θ ?

3. Comparer les estimateurs S_n' et T_n'.
