ECG2

Exercices de colle de la semaine 2

Exercice 2.1

Un enfant saute d'un sommet à un autre d'un triangle de sommets A, B, C tracé à la craie sur le sol (un saut vertical est admis). Il joue de la manière suivante :

- s'il est au sommet A ou au sommet B, il sautera vers le sommet A, B ou C avec la même probabilité ;
- s'il est au sommet C, il saute toujours vers le sommet A.

Avant le premier saut, l'enfant se trouve en A. La probabilité pour que l'enfant soit en A (resp. B, C) après le n-ème saut est notée a_n (resp. b_n, c_n).

1. (a) Déterminer des relations de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n.
   (b) Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$
   (c) En déduire que pour tout entier n, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.
2. (a) Déterminer un polynôme annulateur P de degré 3 de A.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ tels que :
   $$X^n = P \times Q_n + \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n.$$
   (c) Déterminer $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ en fonction de n.
   (d) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.
3. Donner une expression des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2.2

On note, pour tout entier $n \geq 1$, $A_n = \dfrac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

On note, pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = -1 - \left(n - \dfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

1. À l'aide d'un développement limité, déterminer un équivalent simple de la suite a_n.
   En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 2} a_n$ converge.
2. Montrer, pour tout entier $n \geq 2$, que $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.
3. En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et que sa limite ℓ est strictement positive.
4. Justifier que $n! \sim \dfrac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.
