ECG2

Exercices de colle de la semaine 3

Exercice 3.1

On considère deux urnes contenant chacune 2 boules. Initialement, les urnes sont unicolores : la première contient les deux boules noires et la seconde les deux blanches.

On tire au hasard une boule dans chaque urne et on les intervertit. On enchaîne les tirages de façon indépendante. À chaque étape de ce jeu, on dénombre les boules noires dans la première urne.

Pour n un entier naturel non nul, on note les événements :

- Z_n :« il y a aucune boule noire dans l'urne une » ;
- U_n : « il y a 1 boule noire dans l'urne une » ;
- D_n : « il y a 2 boules noires dans l'urne une ».

Pour la suite, on notera : $z_n = P(Z_n)$, $u_n = P(U_n)$ et $d_n = P(D_n)$.

1. Déterminer ces trois valeurs à l'étape $n = 0$ et $n = 1$.
2. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer u_{n+1} en fonction de z_n, u_n et d_n.
3. En déduire une relation entre u_{n+1} et u_n.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3.2

Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 3x + y + z = 0 \text{ et } x + z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.
Soient $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, 0, 1)$ et $c = (0, 1, 1)$. On pose $G = \text{Vect}(a)$.

1. Montrer que E, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de E. Quelle est la dimension de E ?
3. Montrer que (b, c) est une base de F.
4. A-t-on $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$?
5. Montrer que (a, b, c) est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?
7. Soit $u = (2, 4, 7)$. Exprimer u dans la base (a, b, c).
