ECG2

Exercices de colle de la semaine 4

Exercice 4.1

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des suites réelles p-périodiques, c'est-à-dire l'ensemble des suites (u_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(n+p) = u(n).$$

Par exemple, la suite :

$$u = (u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 3, u_3 = 1, u_4 = 2, u_5 = 3, u_6 = 1, \dots)$$

est une suite 3-périodique.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. On considère la famille de suites $(U_i)_{0 \leq i \leq p-1}$ définie pour tout $0 \leq i \leq p-1$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{si il existe } k \in \mathbb{N},\ n = i + kp \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases},$$

soit en d'autres termes si :

$$U_i = (\underbrace{0, \dots, 0, \overbrace{1}^{i^{ème} \text{ position}}, 0, \dots, 0}_{p \text{ termes}}, \underbrace{0, \dots, 0, \overbrace{1}^{(i+p)^{ème} \text{ position}}, 0, \dots, 0}_{p \text{ termes}}, \dots).$$

   (a) Montrer que les suites U_i appartiennent à E.
   (b) Montrer la famille (U_i) avec $0 \leq i \leq p-1$ est libre.
   (c) Donner une base de E. En déduire la dimension de E.

Exercice 4.2

On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée. A chaque lancer, à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on marque un point.
Pour $n \geq 2$, soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus à l'issu de n lancers.

1. Déterminer les lois , les espérances et les variances de X_2 et X_3.
2. Soit $n \geq 2$, quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n? Déterminer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n-1)$.
3. Soit $n \geq 2$, soit $k \in [\![1, n]\!]$, montrer que :

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2} P(X_n = k) + \frac{1}{2} P(X_n = k-1).$$

4. Soit $n \geq 2$. On pose $Q_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) s^k. \end{array}$

   (a) Soit $n \geq 2$. Calculer $Q_n(1)$ et montrer que $Q'_n(1) = E(X_n)$. Exprimer $V(X_n)$ à l'aide de la fonction Q_n.
   (b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$Q_{n+1}(s) = \frac{(1+s)}{2} Q_n(s).$$

   En déduire une expression de $Q_n(s)$ en fonction de n et de s.
   (c) Calculer alors, pour tout $n \geq 2$, l'espérance et la variance de X_n.
