Colle 1. Arthur Bobot

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient p_1 et p_2 deux projecteurs de $\mathscr{L}(E)$ et $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$.

1. On suppose dans cette question que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$.
   (a) Montrer que q est un projecteur.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(p_1) \cap \mathrm{Ker}(p_2)$ et $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(p_1) + \mathrm{Im}(p_2)$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \mathrm{Im}(p_2)$ si, et seulement si, $q = p_1 + p_2$.
2. On suppose dans cette question que $p_1 \circ p_2 = 0$.
   (a) Montrer que q est un projecteur.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Im}(q)$ en fonction des noyaux et images de p_1 et p_2.

Colle 2. Romane Jeangirard

Exercice 2

Soit $c \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, et on note sa couleur. On la remet alors dans l'urne avec c boules de la couleur tirée.

On répète cette opération, et on réalise ainsi une succession de tirages.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale à 1 si on obtient une boule blanche au n-ème tirage, et 0 sinon.

Soit S_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors des n tirages.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. (a) Montrer que :
$$P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) = \frac{1+c}{2+c}.$$
   (b) Montrer que X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Donner $S_n(\Omega)$, et exprimer S_n en fonction de $X_1, \dots, X_n$.
   (b) Montrer que :
$$P_{[S_n=k]}(X_{n+1} = 1) = \frac{1+ck}{2+cn}.$$
   (c) On note $E(S_n)$ l'espérance de la variable aléatoire S_n. Montrer que la variable X_{n+1} suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1+cE(S_n)}{2+cn}$.

Colle 3. Julie Magnin

Exercice 3

Soit $n \geq 2$. Un lecteur mp3 contient n pistes de lectures (numérotées de 1 à n) et fonctionne en mode aléatoire (à la fin de chaque piste, une nouvelle, éventuellement égale à l'ancienne, est choisie aléatoirement). Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k le nombre de pistes différentes qui ont été lues au moins une fois au cours des k premières lectures.

1. Déterminer, en fonction de n et de k, les valeurs prises par X_k.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, donner la probabilité des événements $X_k = 1$ et $X_k = k$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $P(X_{k+1} = i)$ en fonction de $P(X_k = i)$ et de $P(X_k = i-1)$.
4. En déduire que $E(X_{k+1}) = \dfrac{(n-1)}{n}E(X_k) + 1$, puis déterminer une expression de $E(X_k)$.
5. Pour n fixé, que vaut $\lim\limits_{k \to +\infty} E(X_k)$. Ce résultat est-il prévisible ?
6. Pour k fixé, que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_k)$. Ce résultat est-il prévisible ?