

Exercices de colle de la semaine 5

Exercice 5.1

On note φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[x]$ associe le polynôme $\varphi(P) = (x-1)P'(x)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{C} = (1, x, x^2, x^3)$.
3. Déterminer le rang de φ . Quelle commande permettrait de vérifier votre résultat avec Python ?
4. Déterminer une base de $\text{Ker}(\varphi)$ et une base de $\text{Im}(\varphi)$.
5. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
6. Déterminer la matrice de passage de la base \mathcal{C} à la base \mathcal{B} puis la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} .
7. Déterminer la matrice de φ dans la base \mathcal{B} .

On pourra éventuellement s'aider de Python pour les calculs.

Exercice 5.2

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce telle que la probabilité d'apparition de *pile* soit égale à p ($p \in]0, 1[$). Soit N un entier naturel non nul fixé. On effectue N lancers du dé. Si n est le nombre de δ obtenus, on lance alors n fois la pièce.

On définit deux variables aléatoires X et Y de la manière suivante :

- X indique le nombre de δ obtenus aux lancers de dés,
- Y indique le nombre de *pile* obtenus aux lancers de la pièce.

1. Déterminer la loi de X .
2. Pour tout $n \in X(\Omega)$, déterminer la loi de Y conditionnellement à l'événement $[X = n]$.
3. (a) Montrer que pour tout $(n, N) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq n \leq N$, on a $n \binom{N}{n} = N \binom{N-1}{n-1}$.
 (b) En déduire l'espérance de Y .
4. Simulation Python.
 - (a) Écrire une fonction Python d'en-tête `def simul(N,p)` renvoyant une réalisation de la variable Y .
 - (b) Écrire une fonction Python d'en-tête `def Simul(N,p,l)` renvoyant un vecteur de taille ℓ contenant n réalisations indépendantes de la variable X .
 - (c) À l'aide de la fonction `Simul`, déterminer une estimation de $E(X)$ pour différentes valeurs de N et p et vérifier ainsi le résultat de la question 3.(b).