

Exercices de colle de la semaine 6

Exercice 6.1

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher : une noire, une blanche et une verte. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise. On définit les trois variables aléatoires suivantes :

- X représente le numéro du tirage auquel une boule verte sort pour la première fois ;
- Y représente le nombre de boules blanches obtenues avant l'obtention de la première boule verte ;
- Z représente le nombre de boules noires obtenues avant l'obtention de la première boule verte.

1. Déterminer une relation reliant X , Y et Z .

2. Déterminer la loi de la variable aléatoire X .
Donner son espérance et sa variance.

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de Y sachant $[X = k]$.
(b) En déduire la loi du couple (X, Y) .

4. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |x| < 1$, $\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}$.

(a) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y .

(b) Montrer que $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.
En déduire l'espérance et la variance de Y .

5. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z .
Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

6. Déterminer la loi du couple (Y, Z) .

Exercice 6.2

On considère $F = \{(x, y, z) | x + y - z = 0\}$ et $G = Vect(1, 1, 1)$.

1. (a) Déterminer une base (e_1, e_2) de F et une base (e_3) de G .

(b) Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 . En déduire que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

2. On considère p le projecteur sur F parallèlement à G .

(a) Déterminer la matrice de p dans la base \mathcal{B} .

(b) En déduire la matrice de p dans la base canonique. On pourra pour cela s'aider éventuellement du logiciel `Python` pour les calculs matriciels.

(c) Donner $p(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

3. Soit q le projecteur sur G parallèlement à F . Déterminer $q(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.