ECG2

Exercices de colle de la semaine 7

Exercice 7.1

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On considère une urne qui contient trois boules : une blanche, une noire et une rouge.
On effectue des tirages au hasard d'une boule avec remise dans cette urne.
On note X le numéro du tirage où pour la première fois on a obtenu une boule blanche et Y le numéro du tirage où pour la première fois on a obtenu une boule noire.
On note également $U = |X - Y|$ et $W = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de W, son espérance et sa variance.
3. À partir de cette question et jusqu'à la question 5, *on admet* que pour $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de U sachant $[W = k]$ est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.

   Que peut-on en déduire sur la loi de U et sur le couple (U, W) ?
4. Que représente la variable aléatoire $U + W$? En déduire une relation linéaire entre U, W, X et Y.
5. En déduire la valeur de la covariance de X et de Y.
   Expliquer de manière probabiliste le signe de la valeur obtenue.
6. Justifier l'affirmation de la question 3, à savoir que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de U sachant $[W = k]$ est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.

   On cherchera au préalable la loi du couple (X, Y).

Exercice 7.2

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, sous réserve de convergence, $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale définissant $F(x)$ converge. Ainsi, F est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est paire.
3. Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa limite en $+\infty$. En déduire le tableau de variation de F (on ne demande pas la valeur de $F(0)$).
4. (a) Montrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a : $|e^{-a} - e^{-b}| \leq |a - b|$.
   (b) En déduire que pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $|F(x) - F(y)| \leq |x^2 - y^2|$.
   (c) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
