ECS2

Exercices de colle de la semaine 8

Exercice 8.1
Soient les matrices $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P = X^3 - X$ est un polynôme annulateur de F.
   En déduire les éléments propres de F.
2. Déterminer le rang de $G - I_3$ et calculer $G \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   En déduire les éléments propres de G.
3. (a) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres communs à F et G.
   (b) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathscr{B}$, ainsi que les matrices $P^{-1}FP$ et $P^{-1}GP$.
4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note H_a la matrice $H_a = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a \\ -2 & 3-a & 4-a \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que pour tout réel a, on a $H_a = aF + (1-a)G$.
   (b) Calculer $(H_a)^n$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8.2
On note, sous réserve d'existence :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}, \quad J_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}, \quad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}.$$

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, l'existence de I_n, J_n, K_n.
   Quelle relation y a-t-il entre I_n, J_n, K_n ?
2. On note $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n - J = 0$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a : $\quad 0 \leq K_n \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$.
4. Conclure sur la limite de I_n.
