ECG2

Exercices de colle de la semaine 9

Exercice 1

Soit u l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer les endomorphismes v de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $v^2 = u$.

1. (a) Déterminer le rang de $(M - 4I_3)$ et calculer $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. En déduire les valeurs propres de u.

   (b) Déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de u. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

2. Soit v un endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $v^2 = u$.

   (a) Montrer que $v \circ u = u \circ v$.

   (b) En déduire que les sous-espaces propres de u sont stables par v.

   (c) Montrer que la matrice N de v dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale.

   (d) En déduire les quatre seules matrices possibles pour N.

3. Montrer qu'il existe exactement quatre endomorphismes v de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $v^2 = u$ et déterminer leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Soit $a > 0$ et soit $f_a : t \mapsto \begin{cases} at^{-a-1} & \text{si } t \in [1, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f_a est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire admettant f_a pour densité.

   (a) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

   (b) X possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer. Même question pour la variance.

   (c) On pose $Y = \ln(X)$. Déterminer la fonction de répartition de Y, puis reconnaître la loi de Y.
