2023 - 2024

Exercices de colle en ECG2 maths approfondies

0 Suites, fonctions d'une variable réelle, polynômes

Exercice 0.1 (★★ - Une suite récurrente)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \exp(-x-1)$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(\alpha) = \alpha$, et que $0 \leq \alpha \leq 1$.
   (b) Tracer le graphe de f ainsi que la droite d'équation $y = x$ à l'aide de `Python`, et déterminer graphiquement une valeur approchée de α.
   (c) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $|f(x) - f(y)| \leq e^{-1}|x - y|$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq e^{-1}|u_n - \alpha|$.
   En déduire que $|u_n - \alpha| \leq e^{-n}|u_0 - \alpha|$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
   (c) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def approx(eps)` qui, pour $\varepsilon > 0$, renvoie une approximation de α à ε près.

Exercice 0.2 (★★ - Racines réelles d'un polynôme)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.

1. Montrer que P_n est divisible par $(X-1)^3$.
2. Quelles sont les racines réelles de P_n'' ?
3. (★) Montrer que P_n admet au plus 4 racines réelles distinctes.

Exercice 0.3 (★★★ - QSP ESCP 2017)

On considère deux suites réelles u et v définies par leurs premiers termes u_0 et v_0 strictement positifs et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_{n+1}}(u_{n+1} - u_n)$.
2. Montrer que les suites u et v divergent vers $+\infty$.

Exercice 0.4 (★★★ - QSP ESCP 2016)

1. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ est strictement monotone.
2. En déduire que si P est un polynôme réel tel que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$, alors $P = X$.

Exercice 0.5 (★★★ - QSP ESCP 2016)

On dit qu'une application f de E dans E admet x pour point fixe si $f(x) = x$.

Soit f et g deux applications définies sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,1]$, continues et telles que $f \circ g = g \circ f$ et $f \leq g$.

1. Montrer que f admet au moins un point fixe x_0 et qu'alors $g(x_0)$ est encore point fixe pour f.
2. En utilisant une suite définie à partir de x_0, montrer que f et g ont un point fixe commun.

---

1 Calcul matriciel

Exercice 1.1 (★★★ - Inspiré de QSP ESCP 2021)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}.$$

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Exemples.
   (a) Déterminer $\mathscr{C}(I_n)$. Quelle est sa dimension ?
   (b) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des réels deux à deux distincts, et soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\mathscr{C}(D)$. Quelle est sa dimension ?
3. Déterminer $\max\limits_{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$.
4. On suppose que $n = 2$ dans cette question. On cherche à déterminer $\min\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$.
   (a) Montrer que $\min\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) \leq 2$.
   (b) Supposons qu'il existe $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\dim(\mathscr{C}(A)) \leq 1$.
      i. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$.
      ii. Aboutir à une contradiction et conclure.

Exercice 1.2 (★★★ - Inspiré d'une QSP HEC)

Soit n un nombre supérieur ou égal à 2.
On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *nilpotente* s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que M^k est la matrice nulle.

1. (a) Donner un exemple de matrice nilpotente non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Une matrice nilpotente peut-elle être inversible ? Que dire de son rang ?
   (c) Montrer qu'une matrice nilpotente semblable à une matrice diagonale est nécessairement la matrice nulle.
2. On appelle *indice de nilpotence* d'une matrice nilpotente M le plus petit entier strictement positif k tel que M^k est la matrice nulle.

   Le programme `Python` suivant, dont le code est incomplet, permet de calculer l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente.

```python
import numpy as np

A = input("Entrer une matrice nilpotente")
k = 1
B = A
while np.sum(np.abs(B))>0 :
      k = ...
      B = ...
print(...)
```

(a) Expliquer en détail la ligne de code `while np.sum(np.abs(B))>0`.

(b) Compléter le code du programme.

3. Soit M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ nilpotente.

(a) Montrer que la matrice $A = I_n - M$ est inversible et déterminer son inverse.

(b) Montrer que $I_n - A^{-1}$ est nilpotente.

---

2 Séries numériques

Exercice 2.1 (★★)
Nature de $\sum \dfrac{1+1/2+\cdots+1/n}{1+2+\cdots+n}$.

Exercice 2.2 (★★)
Pour $\alpha > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Étudier la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{R_n}{S_n}$.

Exercice 2.3 (★★)
Étudier la nature des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k}$ et $v_n = \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

Exercice 2.4 (★★ - Test de condensation de Cauchy)
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de réels positifs.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $2^k a_{2^{k+1}} \leq \displaystyle\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n \leq 2^k a_{2^k}$.

2. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} 2^k a_{2^k} \leq \sum_{n=1}^{2^p-1} a_n \leq \sum_{k=0}^{p-1} 2^k a_{2^k}.$$

3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{k\geq 0} 2^k a_{2^k}$ converge.

4. *Application :* Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.

Exercice 2.5 (★★)

1. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$.

2. À l'aide d'un équivalent, déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (\ln n)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Exercice 2.6 (★★)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^n$.

1. Déterminer suivant la valeur du paramètre α la limite de la suite (u_n).
2. Déterminer suivant la valeur du paramètre α la nature de la série $\sum(u_n - 1)$.

Exercice 2.7 (★★)

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$.

   On pourra distinguer les cas où $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$.

2. Montrer que $\frac{1}{n\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$.

   En déduire la nature de la série de terme général $\frac{1}{n\ln(n)}$.

Exercice 2.8 (★★★ - Inspiré d'un oral ESCP 2021)

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. On dit que le produit $\prod u_n$ converge si la suite (v_n) définie par $v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$ admet une limite non nulle ℓ, et l'on note alors :

$$\ell = \prod_{k=1}^{+\infty} u_k.$$

1. (a) Montrer que si $\prod u_n$ converge, alors $\lim u_n = 1$.

   (b) Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est divergent. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?

   (c) Étudier la convergence du produit $\prod_{n\geq 2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

2. Dans cette question, on suppose que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :

   (1) le produit $\prod(1 + u_n)$ converge ;

   (2) la série $\sum \ln(1 + u_n)$ converge ;

   (3) la série $\sum u_n$ converge.

3. Étudier la convergence du produit $\prod_{n\geq 2} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

Exercice 2.9 (★★★ - QSP HEC 2008)

Représenter dans le plan l'ensemble des points de coordonnées $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que la série de terme général $u_n = \frac{a^n}{1 + b^n}$ soit convergente.

Exercice 2.10 (★★★ - QSP HEC 2014)

Soit α un réel donné. Pour tout $n \geq 1$, on pose : $\quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$.

1. Étudier suivant les valeurs de α, la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$. En cas de convergence, on précisera la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
2. Étudier la nature de la série de terme général u_n.
3. Soit x un réel vérifiant $|x| < 1$. Étudier suivant les valeurs du réel α, la convergence de la série de terme général $u_n x^n$.

Exercice 2.11 (★★★ - Extrait de EML 2012)
On note, pour tout entier $n \geq 1$, $A_n = \dfrac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.
On note, pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = -1 - \left(n - \dfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

1. À l'aide d'un développement limité, déterminer un équivalent simple de la suite a_n.
   En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} a_n$ converge.
2. Montrer, pour tout entier $n \geq 2$, que $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.
3. En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et que sa limite ℓ est strictement positive.
4. Justifier que $n! \sim \dfrac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

Exercice 2.12 (★★★)
Soit a et b deux réels. Discuter la convergence de la série de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$.

Exercice 2.13 (★★★)
Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{a_n}{(1+a_0)\dots(1+a_n)}$.

1. Montrer que la série v_n converge.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 1 \Leftrightarrow \sum a_n$ diverge.

Exercice 2.14 (★★★)
On donne $a \in \mathbb{R}_+^*$. Discuter suivant a, la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{n^a}{\displaystyle\prod_{p=1}^{n} (1 + a^p)}.$$

Exercice 2.15 (★★★)
Discuter la nature de la série de terme général :

$$u_n = \left(\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1}\right)^n.$$

---

3 Calculs de probabilités

Exercice 3.1 (★★)

Un signal binaire (de valeur 1 ou -1) doit transiter par n relais. Au passage de chaque relais, le signal a une probabilité p $(0 < p < 1)$ d'être inversé. On suppose que les relais sont indépendants. On note p_n la probabilité pour que le signal transmis soit identique au signal initial.

1. Montrer que :
$$p_n = p + (1-2p)p_{n-1}.$$
2. En déduire une expression générale de p_n et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3.2 (★★)

Un enfant saute d'un sommet à un autre d'un triangle de sommets A, B, C tracé à la craie sur le sol (un saut vertical est admis). Il joue de la manière suivante :

- s'il est au sommet A ou au sommet B, il sautera vers le sommet A, B ou C avec la même probabilité ;
- s'il est au sommet C, il saute toujours vers le sommet A.

Avant le premier saut, l'enfant se trouve en A. La probabilité pour que l'enfant soit en A (resp. B, C) après le n-ème saut est notée a_n (resp. b_n, c_n).

1. (a) Déterminer des relations de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n.
   (b) Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$
   (c) En déduire que pour tout entier n, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.
2. (a) Déterminer un polynôme annulateur P de degré 3 de A.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ tels que :
$$X^n = P \times Q_n + \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n.$$
   (c) Déterminer $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ en fonction de n.
   (d) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.
3. Donner une expression des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3.3 (★★)

Un laboratoire fabrique un alcool-test et les essais montrent que :

- 2% des personnes contrôlées sont en état d'ébriété ;
- 95 fois sur 100 l'alcool-test a donné un résultat positif alors que la personne était en état d'ébriété ;
- 95 fois sur 100 l'alcool-test a donné un résultat négatif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété.

1. On essaie l'appareil sur une personne et on constate que le résultat est positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?

2. On essaie l'appareil sur une personne et on constate que le résultat est négatif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?

3. Déterminer la probabilité que le résultat donné par l'appareil soit faux.

Exercice 3.4 (★★)

On considère deux urnes contenant chacune 2 boules. Initialement, les urnes sont unicolores : la première contient les deux boules noires et la seconde les deux blanches.

On tire au hasard une boule dans chaque urne et on les intervertit. On enchaîne les tirages de façon indépendante. À chaque étape de ce jeu, on dénombre les boules noires dans la première urne.

Pour n un entier naturel non nul, on note les événements :

- Z_n :« il y a aucune boule noire dans l'urne une » ;
- U_n : « il y a 1 boule noire dans l'urne une » ;
- D_n : « il y a 2 boules noires dans l'urne une ».

Pour la suite, on notera : $z_n = P(Z_n)$, $u_n = P(U_n)$ et $d_n = P(D_n)$.

1. Déterminer ces trois valeurs à l'étape $n = 0$ et $n = 1$.

2. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer u_{n+1} en fonction de z_n, u_n et d_n.

3. En déduire une relation entre u_{n+1} et u_n.

4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3.5 (★★★ - QSP HEC ECE 2014)

On dispose de n urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$, et on dispose 3 boules dans chaque urne.
Dans l'ensemble des $3n$ boules, une seule est bleue, les autres sont rouges.
Sachant que l'on a tiré sans remise deux boules rouges dans l'urne U_1, quelle est la probabilité que la boule bleue se trouve dans l'urne U_2 ?

Exercice 3.6 (★★★★ - Loi du zéro-un de Borel)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On note $p_n = P(A_n)$.

On note $B = \displaystyle\bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$.

1. Expliquer pourquoi on a :
$$B = \{\omega \in \Omega,\ \omega \text{ appartient à une infinité des } A_n\}.$$

2. On suppose que la série $\displaystyle\sum_k P(A_k)$ converge. Montrer que $P(B) = 0$.

3. On suppose que les évènements (A_n) sont indépendants, et que la série $\displaystyle\sum_k P(A_k)$ est divergente.

   (a) Montrer que l'évènement $\overline{B}$ est égal à $\displaystyle\bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n} \overline{A_k}\right)$.

(b) Exprimer $P\left(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right)$ en fonction des p_k.

(c) Montrer que la série $\sum_k \ln(1-p_k)$ est divergente.

On pourra pour cela discuter des cas $p_k \to 0$ et $p_k \nrightarrow 0$.

(d) En déduire que $P(B) = 1$.

Exercice 3.7 (★★★★ - Oral ESCP 2015)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N et on extrait ces N boules une à une et sans remise. Pour $i \in [\![1, N]\!]$, le numéro i est dit bien placé si ce numéro apparait lors du i-ème tirage. On considère les évènements :

- B_i : « le numéro i est bien placé ».
- $E_{N,k}$: « au cours de l'expérience, exactement k numéros sont bien placés ».

L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Les évènements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
2. Pour $1 \leq j \leq N$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq N$, calculer la probabilité de l'évènement :
$$A_{i_1,i_2,\ldots,i_j} = \text{« les numéros } i_1, i_2, \ldots, i_j \text{ sont bien placés ».}$$
On admet que $P(E_{N,0}) = 1 - \sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_j\leq n} P(A_{i_1,i_2,\ldots,i_j})$.
3. En déduire que : $P(E_{N,0}) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!}$.
4. Montrer la relation : $P(E_{N,k}) = \frac{1}{k!}P(E_{N-k,0})$.
5. Pour k fixé, montrer que la suite $(P(E_{N,k}))_{N\geq 0}$ est convergente. On note p_k sa limite. Montrer que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une probabilité sur $\mathbb{N}$, et reconnaitre la loi correspondante.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$:
$$S_{2p+1} \leq S_{2p+3} \leq \frac{1}{e} \leq S_{2p+2} \leq S_{2p}.$$
En déduire, pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$, que :
$$\sum_{j=0}^{n} |P(E_{N,j}) - p_j| \leq \frac{e}{(N+1-n)!}.$$

Exercice 3.8 (★★★★)

On considère le problème suivant (appelé problème des chapeaux) : n personnes laissent leur chapeau à un vestiaire. En repartant, chaque personne reprend un chapeau au hasard. Quelle est la probabilité qu'aucun ne reprenne son propre chapeau ?

Afin de modéliser cette expérience aléatoire, on prendra pour univers Ω l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, associant une personne le chapeau qu'elle prend en sortant, et $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$.

1. Déterminer le cardinal de Ω.

2. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'évènement « la i-ème personne repart avec son chapeau ». Justifier que la probabilité de A_i est égale à $\dfrac{(n-1)!}{n!}$

3. Plus généralement, si $k \in [\![1, n]\!]$, et $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, déterminer la probabilité de l'évènement $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$.

4. En déduire la probabilité de $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

   On pourra utiliser sans démonstration que $n \geq 2$ et pour tout évènement $A_1, \ldots, A_n$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})\right).$$

5. Conclure en donnant la probabilité que personne ne reparte avec son propre chapeau.

6. Quelle est approximativement la probabilité qu'aucune personnes n'ait repris son chapeau quand n est grand ?

---

4 Espaces vectoriels

Exercice 4.1 (★)

Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les deux sous-ensembles suivants :

$$F = \left\{\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\} \text{ et } G = \left\{\begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4.2 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.
Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on note $f_k : x \mapsto |x - a_k|$.
Montrer que la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 4.3 (★★)

On note $E = \mathbb{C}_4[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 4.
Soient a et b deux nombres complexes distincts. On considère le sous-ensemble de E suivant :

$$F = \{P \in E,\ P(a) = 0 \text{ et } P(b) = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et trouver une base de ce sous-espace.

Exercice 4.4 (★★)

Soit $\mathscr{S}_3(\mathbb{C})$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ formé des matrices symétriques, et $\mathscr{A}_3(\mathbb{C})$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ formé des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathscr{S}_3(\mathbb{C})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{C})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\mathscr{M}_3(\mathbb{C}) = \mathscr{S}_3(\mathbb{C}) \oplus \mathscr{A}_3(\mathbb{C})$.

   Quelle est l'unique décomposition de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ comme somme d'un élément de $\mathscr{S}_3(\mathbb{C})$ et d'un élément de $\mathscr{A}_3(\mathbb{C})$?
3. Déterminer une base de $\mathscr{A}_3(\mathbb{C})$. Quelle est la dimension de $\mathscr{S}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 4.5 (★★)

Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 3x + y + z = 0 \text{ et } x + z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.
Soient $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, 0, 1)$ et $c = (0, 1, 1)$. On pose $G = \text{Vect}(a)$.

1. Montrer que E, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de E. Quelle est la dimension de E ?
3. Montrer que (b, c) est une base de F.
4. A-t-on $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$?
5. Montrer que (a, b, c) est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?
7. Soit $u = (2, 4, 7)$. Exprimer u dans la base (a, b, c).

Exercice 4.6 (★★)

Dans $\mathbb{R}_4[X]$, on pose $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \,:\, P(0) = 0\}$, $G = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \,:\, P(4) = 0\}$ et $H = F \cap G$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ et en donner une base.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ et en donner une base formée de puissances de $(X - 4)$.
3. Montrer que $H = \{X(X - 4) \times Q,\ Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$. En déduire une base de H.
4. Déterminer un supplémentaire de H dans E.

Exercice 4.7 (★★)

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des suites réelles p-périodiques, c'est-à-dire l'ensemble des suites (u_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(n + p) = u(n).$$

Par exemple, la suite :

$$u = (u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 3, u_3 = 1, u_4 = 2, u_5 = 3, u_6 = 1, \dots)$$

est une suite 3-périodique.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. On considère la famille de suites $(U_i)_{0\leq i\leq p-1}$ définie pour tout $0 \leq i \leq p-1$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{si il existe } k \in \mathbb{N},\ n = i + kp \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases},$$

soit en d'autres termes si :

$$U_i = (\underbrace{0, \dots, 0, \overbrace{1}^{i^{\text{ème}} \text{ position}}, 0, \dots, 0}_{p \text{ termes}}, \underbrace{0, \dots, 0, \overbrace{1}^{(i+p)^{\text{ème}} \text{ position}}, 0, \dots, 0}_{p \text{ termes}}, \dots).$$

   (a) Montrer que les suites U_i appartiennent à E.
   (b) Montrer la famille (U_i) avec $0 \leq i \leq p-1$ est libre.
   (c) Donner une base de E. En déduire la dimension de E.

Exercice 4.8 (★★★)

Soit $n \geq 1$ fixé. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose $F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,:\, \forall j \in [\![, n]\!] \setminus \{i\},\ P(j) = 0\}$.

1. Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$, et que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $P \in F_i$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda \displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (X - j)$.

2. Montrer que la somme $F_0 + F_1 + \cdots + F_n$ est directe.

3. En déduire que $\mathbb{R}_n[X] = \displaystyle\bigoplus_{i=0}^{n} F_i$.

---

5 Variables aléatoires discrètes

Exercice 5.1 (★)

Une urne contient une boule noire et une boule blanche. On tire une boule de l'urne. Si elle est blanche alors on remet la boule dans l'urne et on y ajoute une boule noire. Si elle est noire alors on remet simplement la boule dans l'urne. On répète cette opération une infinité de fois.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une boule noire.
On prend comme convention que $X = 0$ si l'on n'obtient jamais de boule noire.

1. Déterminer la loi de X.

2. Montrer que $X + 1$ admet une espérance et calculer sa valeur.
   En déduire l'existence et la valeur de $E(X)$.

Exercice 5.2 (★★)

On dispose d'une pièce équilibrée. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur k si l'on obtient pour la première fois *pile* puis *face* aux lancers $(k-1)$ et k (avec $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$), X prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.
On note P_1 l'événement « on obtient *pile* au premier lancer ».

1. Déterminer $P_{P_1}(X = k)$ pour tout $k \geq 2$.
   Justifier que $P_{\overline{P_1}}(X = k) = P(X = k-1)$ pour tout $k \geq 3$.

2. En déduire que pour tout $k \geq 3$, $P(X = k) = \dfrac{1}{2} P(X = k-1) + \dfrac{1}{2^k}$.

3. Pour tout $k \geq 2$, on pose $u_k = 2^k P(X = k)$. Montrer que la suite $(u_k)_{k \geq 2}$ est arithmétique.

   En déduire la loi de X.

4. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 5.3 (★★)

Soit $c \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, et on note sa couleur. On la remet alors dans l'urne avec c boules de la couleur tirée.

On répète cette opération, et on réalise ainsi une succession de tirages.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale à 1 si on obtient une boule blanche au n-ème tirage, et 0 sinon.

Soit S_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors des n tirages.

1. Déterminer la loi de X_1.

2. (a) Montrer que :
$$P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) = \frac{1+c}{2+c}.$$
   (b) Montrer que X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Donner $S_n(\Omega)$, et exprimer S_n en fonction de $X_1, \ldots, X_n$.

   (b) Montrer que :
$$P_{[S_n=k]}(X_{n+1} = 1) = \frac{1+ck}{2+cn}.$$
   (c) On note $E(S_n)$ l'espérance de la variable aléatoire S_n. Montrer que la variable X_{n+1} suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1+cE(S_n)}{2+cn}$.

Exercice 5.4 (★★)

On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée. A chaque lancer, à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on marque un point. Pour $n \geq 2$, soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus à l'issu de n lancers.

1. Déterminer les lois , les espérances et les variances de X_2 et X_3.

2. Soit $n \geq 2$, quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n? Déterminer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n-1)$.

3. Soit $n \geq 2$, soit $k \in [\![1, n]\!]$, montrer que :
$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(X_n = k) + \frac{1}{2}P(X_n = k-1).$$

4. Soit $n \geq 2$. On pose $Q_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)s^k. \end{array}$

   (a) Soit $n \geq 2$. Calculer $Q_n(1)$ et montrer que $Q_n'(1) = E(X_n)$. Exprimer $V(X_n)$ à l'aide de la fonction Q_n.

(b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$Q_{n+1}(s) = \frac{(1+s)}{2} Q_n(s).$$

En déduire une expression de $Q_n(s)$ en fonction de n et de s.

(c) Calculer alors, pour tout $n \geq 2$, l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 5.5 (★★)

On considère un processus binomial de paramètre $p \in]0,1[$, c'est-à-dire une suite d'épreuves indépendantes telles que chaque épreuve conduit à un succès avec probabilité p ou à un échec avec probabilité $q = 1-p$.

Dans tout l'exercice, on fixe un entier $r > 0$. On admettra que si $x \in]-1,1[$, alors la série $\sum_{n \geq r} \binom{n}{r} x^{n-r}$ converge et sa somme vaut $\frac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

1. On note X_r le rang d'apparition du r-ème succès.

   (a) Que dire de X_1 ?

   (b) Quel est l'ensemble V des valeurs que X_r peut prendre ?

   (c) Montrer que pour tout $k \in V$, $P(X_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$.
   On dit que X_r suit la *loi de Pascal de paramètre* (r,p).

2. (a) Montrer que $E(X_r)$ existe et vaut $\frac{r}{p}$.

   (b) Montrer que $E(X_r(X_r+1))$ existe et la calculer. En déduire que X_r admet une variance qui vaut $\frac{rq}{p^2}$.

Exercice 5.6 (★★)

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce telle que la probabilité d'apparition de *pile* soit égale à p ($p \in]0,1[$). Soit N un entier naturel non nul fixé. On effectue N lancers du dé. Si n est le nombre de *6* obtenus, on lance alors n fois la pièce.

On définit deux variables aléatoires X et Y de la manière suivante :

- X indique le nombre de *6* obtenus aux lancers de dés,
- Y indique le nombre de *pile* obtenus aux lancers de la pièce.

1. Déterminer la loi de X.

2. Pour tout $n \in X(\Omega)$, déterminer la loi de Y conditionnellement à l'événement $[X = n]$.

3. (a) Montrer que pour tout $(n, N) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq n \leq N$, on a $n\binom{N}{n} = N\binom{N-1}{n-1}$.

   (b) En déduire l'espérance de Y.

4. Simulation `Python`.

   (a) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simul(N,p)` renvoyant une réalisation de la variable Y.

   (b) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def Simul(N,p,l)` renvoyant un vecteur de taille ℓ contenant n réalisations indépendantes de la variable X.

(c) À l'aide de la fonction `Simul`, déterminer une estimation de $E(X)$ pour différentes valeurs de N et p et vérifier ainsi le résultat de la question 3.(b).

Exercice 5.7 (★★)

On dispose de $(n+1)$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_n$, chaque urne U_k contenant $(k+1)$ boules numérotées de 0 à k. On tire une première boule dans l'urne U_n, dont le numéro indique dans quelle urne on tirera une seconde boule. On note K le numéro de la première boule tirée, X le numéro de la deuxième.

1. Déterminer $E(X|[K=k])$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.
2. En déduire $E(X)$.
3. Montrer que la loi de X est donnée par $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $\forall i \in [\![0,n]\!],\ P(X=i) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=i}^{n}\dfrac{1}{k+1}$.
4. Retrouver l'espérance de X grâce à la question précédente.

Exercice 5.8 (★★)

On procède à des lancers successifs de pièces de monnaie avec probabilité $p \in]0,1[$ d'obtenir « pile ». On compte alors, parmi les premiers lancers, combien donnent le même résultat avant que l'autre côté de la pièce n'apparaisse. On note L la variable aléatoire associée à ce décompte.

1. Soit P_1 l'événement « obtenir pile au premier lancer ».
   Déterminer $P_{P_1}(L \geq n)$ pour tout $n \geq 1$.
2. Déterminer l'espérance conditionnelle $E(L|P_1)$.
3. Déterminer l'espérance de L.

Exercice 5.9 (★★★)

Soit $n \geq 2$. Un lecteur mp3 contient n pistes de lectures (numérotées de 1 à n) et fonctionne en mode aléatoire (à la fin de chaque piste, une nouvelle, éventuellement égale à l'ancienne, est choisie aléatoirement). Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k le nombre de pistes différentes qui ont été lues au moins une fois au cours des k premières lectures.

1. Déterminer, en fonction de n et de k, les valeurs prises par X_k.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, donner la probabilité des événements $X_k = 1$ et $X_k = k$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1,n]\!]$, montrer que :
$$P(X_{k+1} = i) = \frac{n-i+1}{n}P(X_k = i-1) + \frac{i}{n}P(X_k = i).$$
4. En déduire que $E(X_{k+1}) = \dfrac{(n-1)}{n}E(X_k) + 1$, puis déterminer une expression de $E(X_k)$.
5. Pour n fixé, que vaut $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} E(X_k)$. Ce résultat est-il prévisible ?
6. Pour k fixé, que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(X_k)$. Ce résultat est-il prévisible ?

---

6 Applications linéaires

Exercice 6.1 (★★)

On note φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[x]$ associe le polynôme $\varphi(P) = (x-1)P'(x)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique $\mathscr{C} = (1, x, x^2, x^3)$.
3. Déterminer le rang de φ. Quelle commande permettrait de vérifier votre résultat avec `Python` ?
4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
5. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
6. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathscr{C}$ à la base $\mathscr{B}$ puis la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$.
7. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.

   On pourra éventuellement s'aider de `Python` *pour les calculs.*

Exercice 6.2 (★★)

On considère $F = \{(x, y, z) | x + z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1, -1, 1))$.

1. (a) Déterminer une base (e_1, e_2) de F et une base (e_3) de G.

   (b) Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. On considère p le projecteur sur F parallèlement à G.

   (a) Déterminer la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$.

   (b) En déduire la matrice de p dans la base canonique. On pourra pour cela s'aider éventuellement du logiciel `Python` pour les calculs matriciels.

   (c) Donner $p((x, y, z))$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Soit q le projecteur sur G parallèlement à F. Déterminer $q((x, y, z))$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 6.3 (★★)

Soit E un espace vectoriel, F et G des sous-espaces supplémentaires de E, de sorte que pour tout $z \in E$, il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que

$$z = x + y.$$

On définit s la *symétrie par rapport à F dans la direction de G* en posant

$$s(z) = x - y.$$

1. Montrer que s est une application linéaire.
2. Montrer que $s \circ s = Id_E$. En particulier, s est un isomorphisme, et $s^{-1} = s$.
3. Montrer que $F = \mathrm{Ker}(s - Id_E)$ et que $G = \mathrm{Ker}(s + Id_E)$.

4. On suppose que E est de dimension finie n, et on note $k = \dim(F)$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$. Montrer que :

$$M_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 0\dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{k \text{ fois}}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{n-k \text{ fois}}).$$

Exercice 6.4 (★★)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A.

1. Déterminer une base des espaces $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ et $\mathrm{Ker}(A - 2I_3)$.
2. En déduire qu'il existe une base $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathscr{C}$ soit D.
3. Déterminer une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$. Donner P^{-1}.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n. \end{cases}$$

Exercice 6.5 (★★)

Soit $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & p & 0 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à M.

1. Montrer que $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ 1 \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ -1 \\ p \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ puis la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base canonique.
3. Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathscr{B}$.
4. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $M^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. *Application :* Un mobile se déplace sur un axe d'origine O.
À chaque instant, il est soit en A d'abscisse 1, soit en B d'abscisse -1, soit en O d'abscisse 0.
Si à un instant donné il est en O alors à l'instant suivant, il sera en A avec la probabilité p ou en B avec la probabilité q.
Si à un instant donné il est en A ou en B alors à l'instant suivant, il sera à coup sûr en O.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de ce mobile à l'instant n.
On pose $X_0 = 0$ (le mobile se situe initialement en 0).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = -1) \\ P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{pmatrix}$.

   (a) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = MU_n$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Déterminer alors $P(X_n = -1)$, $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.6 (★★)

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à cœfficients réels, $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$, I la matrice identité d'ordre n.
À chaque matrice $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de E, on associe l'application T_U de E dans $\mathbb{R}$, qui à une matrice M associe la somme des éléments diagonaux du produit UM :

$$M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \mapsto T_U(M) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_{i,j} m_{j,i} = \mathrm{Tr}(UM).$$

1. (a) Montrer que $T_U \in E^*$.

   (b) Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(T_U)$ puis de $\mathrm{Ker}(T_U)$.

2. Un cas particulier : $n = 2$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(T_U)$ est l'ensemble des matrices de E dont la sommes des 4 cœfficients est nulle et qu'il contient au moins une matrice inversible.

3. Montrer que l'application $\varphi : E \to E^*$, $U \mapsto \varphi(U) = T_U$, est une application linéaire bijective.

4. Soit H un hyperplan de E, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de E de dimension $n^2 - 1$.

   (a) Montrer que pour toute matrice A non nulle de E qui n'appartient pas à H, on a : $E = H \oplus \mathrm{Vect}(A)$.

   (b) Pour toute matrice M de E, il existe un unique couple $(N, \alpha) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $M = N + \alpha A$.
   Soit l l'application qui à M associe α. Montrer que $l \in E^*$.
   En déduire l'existence d'une matrice U de E telle que $H = \mathrm{Ker}(T_U)$.

Exercice 6.7 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ associe le polynôme $\varphi(P) = (x-1)P' - xP''$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

3. Déterminer l'image, le rang et le noyau de φ.

Exercice 6.8 (★★)
On note $E = \mathbb{R}_2[x]$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
On considère $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique est M.
Soit $P_1 = x^2 - 1$, $P_2 = x^2 - x + 1$ et $P_3 = x^2 + x + 1$.
On note $V_1 = \text{Vect}(P_1)$ et $V_2 = \text{Vect}(P_1, P_2)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de E.
2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
3. Montrer que f^3 est nul et en déduire un polynôme annulateur de f.
4. Montrer que V_1 et V_2 sont des sous-espaces vectoriels stables par f.
5. On veut déterminer tous les sous-espaces vectoriels stables par f.
   (a) Soit D une droite vectorielle stable par f. Montrer que $D = V_1$.
   (b) Soit Π un plan stable par f et $v = \alpha\, P_1 + \beta\, P_2 + \gamma\, P_3 \in \Pi$.
   Montrer que $(v, f(v), f^2(v))$ est une famille liée. En déduire que $\gamma = 0$ puis que $\Pi = V_2$.
   (c) Conclure.

Exercice 6.9 (★★)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A un élément non nul de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit T l'application définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$T(M) = M - \text{Tr}(M)A.$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On suppose dans cette question que $\text{Tr}(A) = 1$.
   (a) Déterminer un polynôme annulateur de T.
   (b) Montrer que $\text{Ker}(T) = \text{Vect}(A)$.
3. On suppose dans cette question que $\text{Tr}(A) \neq 1$.
   Montrer que T est un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6.10 (★★)
Soit p et q deux projecteurs définis sur un espace vectoriel E.

1. Montrer l'équivalence :

$$[p + q \text{ est un projecteur }] \Leftrightarrow [p \circ q = q \circ p = 0]\,.$$

2. Prouver que lorsque $p + q$ est un projecteur, on a :
   (a) $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$,
   (b) $\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.

Exercice 6.11 (★★)

Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose :

$$f(ax^2 + bx + c) = (a + 3b + 3c)x^2 + (2b + c)x - 2b - c.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ et déterminer sa matrice dans la base canonique.
2. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[x]$.
4. Montrer que f est le projecteur sur F parallèlement à G et préciser F et G.
5. Donner un polynôme annulateur de f.
6. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces stables par f.
7. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[x]$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.12 (★★)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On considère f un endomorphisme de E pour lequel il existe $a \in \mathbb{R}$ non nul tel que $f^3 - 3af^2 + a^2 f = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(a^2 \mathrm{Id}_E - 3af + f^2)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(a^2 \mathrm{Id}_E - 3af + f^2) = E$.
3. En déduire que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires.

Exercice 6.13 (★★)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient f et g des endomorphismes de E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Ker}(g) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0_E\}$.
2. $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(g) = E$.
3. En déduire que $f \circ g$ est un automorphisme si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) = E$, $\mathrm{Ker}(g) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g) = E$.

Exercice 6.14 (★★)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient p_1 et p_2 deux projecteurs de $\mathscr{L}(E)$ et $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$.

1. On suppose dans cette question que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$.
   (a) Montrer que q est un projecteur.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(p_1) \cap \mathrm{Ker}(p_2)$ et $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(p_1) + \mathrm{Im}(p_2)$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \mathrm{Im}(p_2)$ si, et seulement si, $q = p_1 + p_2$.
2. On suppose dans cette question que $p_1 \circ p_2 = 0$.
   (a) Montrer que q est un projecteur.
   (b) Montrer que, dans ce cas aussi, $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(p_1) \cap \mathrm{Ker}(p_2)$ et $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(p_1) + \mathrm{Im}(p_2)$.

Exercice 6.15 (★★★)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E.
On pose :

$$F = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(f^k) \quad \text{et} \quad G = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(f^k).$$

1. (a) Justifier que les suites $\left(\mathrm{Ker}(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\mathrm{Im}(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion. Que peut-on dire des suites $\left(\dim \mathrm{Ker}(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dim \mathrm{Im}(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$?

   (b) En déduire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $F = \mathrm{Ker}(f^p)$ et $G = \mathrm{Im}(f^p)$.

2. Montrer que :

   (i) F et G sont des sous-espaces vectoriels de E stables par f ;

   (ii) l'endomorphisme f induit sur F un endomorphisme f_G nilpotent et sur G un endomorphisme f_G bijectif ;

   (iii) les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E.

On peut montrer l'unicité d'un couple (F, G) vérifiant les trois conditions ci-dessus. On dit que (F, G) réalise la décomposition de Fitting de E pour l'endomorphisme f.

Exercice 6.16 (★★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \dots & \binom{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$.

Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Exercice 6.17 (★★★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

1. Justifier l'existence et l'unicité de $(p_0, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$u^n(x_0) = p_0 x_0 + p_1 u(x_0) + \dots + p_{n-1} u^{n-1}(x_0).$$

2. On pose $P = X^n - p_{n-1}X^{n-1} - \dots - p_1 X - p_0$.

   (a) Montrer que P est un polynôme annulateur de u.

   (b) À l'aide du théorème de division euclidienne, montrer que tout polynôme annulateur de u est un multiple de P.

3. On pose $\mathbb{R}[u] = \{Q(u),\ Q \in \mathbb{R}[x]\}$.

   (a) À l'aide du théorème de division euclidienne, montrer que $\mathbb{R}[u] = \{Q(u),\ Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\}$.

   (b) Montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre. En déduire la dimension de $\mathbb{R}[u]$.

4. On note $\mathscr{C}(u)$ le commutant de u, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u. Montrer que $\mathscr{C}(u) = \mathbb{K}[u]$.

---

7 Couples de variables discrètes

Exercice 7.1 (★)

On considère deux variables aléatoires X et Y telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, \dots, n\}$ et :

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = a \times i \times j.$$

1. Déterminer la valeur de la constante a.
2. Donner la loi et l'espérance de X.
3. Déterminer la loi de Y.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $P(X = Y)$.

Exercice 7.2 (★)

Soit λ et μ deux réels strictement positifs.
Soit U, V et W trois variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que U et W suivent la loi de Poisson de paramètre λ et V suit la loi de Poisson de paramètre μ.
On pose $X = U + V$ et $Y = V + W$.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Montrer que $\text{Cov}(X, Y)$ existe et la calculer.
3. En déduire le cœfficient de corrélation linéaire de X et Y.

Exercice 7.3 (★★)

Soit $m \geq 2$, une urne contient 2 boules blanches et $m - 2$ boules noires. On les tire une à une sans remise. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche et Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la seconde boule blanche.

1. Donner les ensembles images $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
2. Soient $(k, \ell) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
   Justifier que si $k \geq \ell$, $P([X = k] \cap [Y = \ell]) = 0$ et si $k < \ell$, $P([X = k] \cap [Y = \ell]) = \dfrac{2}{m(m-1)}$.
3. Soit $k \in X(\Omega)$. Montrer que $P(X = k) = \dfrac{2(m-k)}{m(m-1)}$.
4. On pose $D = Y - X$. Montrer que D a la même loi que X.
5. Les variables aléatoires X et D sont elles indépendantes ?
6. Montrer que $E(Y) = 2E(X)$ et que $\text{Cov}(X, Y) = \dfrac{V(Y)}{2}$.
7. On pose $Z = m + 1 - Y$. Montrer que X et Z ont la même loi.
   En déduire $E(X)$ et $E(Y)$.

Exercice 7.4 (★★)

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant la même loi géométrique de paramètre p. On pose $q = 1 - p$, $U = X_1 + X_2$, $T = X_1 - X_2$.

1. Déterminer la loi de U.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   (a) Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $[U = n]$.
   (b) Calculer l'espérance conditionnelle $E(X_1 \mid [U = n])$. Retrouver la valeur de $E(X_1)$.
3. Déterminer la loi de T.
4. Calculer $\mathrm{Cov}(U, T)$. Les variables U et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.5 (★★)

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Une urne contient des boules rouges et des boules blanches en proportions respectives r et b avec $0 < r < 1$ et $b = 1 - r$.
Un joueur effectue n tirages successifs d'une boule de cette urne, avec remise après chaque tirage.
Pour $k \geq 2$, le joueur gagne un point au k-ième tirage si la couleur de la boule obtenue à ce tirage n'est pas celle obtenue au tirage précédent. Sinon son gain à ce rang est nul.
Soit G la variable aléatoire égale au nombre total de points gagnés par le joueur au bout des n tirages.

1. Pour $k \in \{2, \dots, n\}$, on définit la variable X_k égale au gain du joueur pour le tirage de rang k. Préciser la loi de X_k et calculer $\mathrm{Cov}(X_k, X_{k+1})$ pour $k \in \{2, \dots, n-1\}$.
2. Calculer l'espérance et la variance de G.

Exercice 7.6 (★★)

Soient $(p, q) \in]0, 1[^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient T, T' et U trois variables aléatoires mutuellement indépendantes.
On suppose que T suit la loi géométrique de paramètre p, T' suit la loi géométrique de paramètre q et U suit la loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$.
On pose $X = T + U$ et $X' = T' + (n - U)$.

1. Déterminer, en justifiant leur existence, l'espérance et la variance de X et X'.
2. Déterminer la covariance de X et X'.
3. Les variables aléatoires X et X' peuvent-elles être indépendantes ?
4. Déterminer le cœfficient de corrélation linéaire de U et X.

Exercice 7.7 (★★)

Soit λ un réel strictement positif. Soit $p \in]0, 1[$.
Le nombre N d'enfants d'une famille d'une population suit la loi de Poisson de paramètre λ. Chaque enfant présente à la naissance la probabilité p d'avoir un caractère génétique bien défini et ceci, indépendamment des autres enfants. Soit X le nombre d'enfants d'une famille présentant ce caractère et Y le nombre d'enfants ne le présentant pas.

1. Quelle relation existe-t-il entre N, X et Y ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de X sachant $[N = n]$.
   En déduire la loi de X.

3. Déterminer la loi de Y.

4. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exercice 7.8 (★★)
Une urne contient trois boules indiscernables au toucher : une noire, une blanche et une verte. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise. On définit les trois variables aléatoires suivantes :

- X représente le numéro du tirage auquel une boule verte sort pour la première fois ;
- Y représente le nombre de boules blanches obtenues avant l'obtention de la première boule verte ;
- Z représente le nombre de boules noires obtenues avant l'obtention de la première boule verte.

1. Déterminer une relation reliant X, Y et Z.

2. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
   Donner son espérance et sa variance.

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de Y sachant $[X = k]$.
   (b) En déduire la loi du couple (X, Y).

4. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |x| < 1$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}$.

   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

   (b) Montrer que $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
   En déduire l'espérance et la variance de Y.

5. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.
   Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

6. Déterminer la loi du couple (Y, Z).

Exercice 7.9 (★★★)
On considère trois boîtes et une infinité de jetons. On place successivement chacun des jetons, au hasard dans l'une des trois boîtes. On suppose que chaque boîte est vide au départ et de capacité illimitée. On suppose également qu'à chaque fois qu'un jeton est placé, il l'est de façon équiprobable dans chaque boîte.
Soit Y (resp. Z) le nombre de jetons placés lorsque, pour la première fois, deux boîtes exactement (resp. trois boîtes exactement) sont occupées par au moins un jeton.

1. Déterminer la loi de Y.

2. Déterminer la loi de Z sachant $[Y = k]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3. En déduire la loi de Z et la loi du couple (Y, Z).

Exercice 7.10 (★★★ - Oral ESCP 2016)

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soient λ et p deux réels tels que $\lambda > 0$ et $0 < p < 1$.
On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi définie par :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X = n, Y = k) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^2$.
2. Déterminer la loi marginale de la variable aléatoire X, puis celle de la variable aléatoire Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi conditionnelle de la variable aléatoire Y, sachant que $[X = n]$ est réalisé.
4. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X - Y$. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.
5. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.11 (★★★ - Oral ESCP 2021)

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On considère une urne qui contient trois boules : une blanche, une noire et une rouge.
On effectue des tirages au hasard d'une boule avec remise dans cette urne.
On note X le numéro du tirage où pour la première fois on a obtenu une boule blanche, et Y le numéro du tirage où pour la première fois on a obtenu une boule noire.
On note également $U = |X - Y|$ et $W = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de W, son espérance et sa variance.
3. À partir de cette question et jusqu'à la question 5, *on admet* que pour $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de U sachant $[W = k]$ est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.

   Que peut-on en déduire sur la loi de U et sur le couple (U, W) ?
4. Que représente la variable aléatoire $U + W$? En déduire une relation linéaire entre U, W, X et Y.
5. En déduire la valeur de la covariance de X et de Y.
   Expliquer de manière probabiliste le signe de la valeur obtenue.
6. Justifier l'affirmation de la question 3, à savoir que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de U sachant $[W = k]$ est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.

   On cherchera au préalable la loi du couple (X, Y).

---

8 Intégrales généralisées

Exercice 8.1 (★)
On considère l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que cette intégrale converge.
2. À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, déterminer la valeur de cette intégrale.

Exercice 8.2 (★)
On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^4}\mathrm{d}u$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u$.

1. Étudier la nature de ces deux intégrales.
2. À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, montrer que $I = J$.
3. À l'aide du changement de variable $x = u - \dfrac{1}{u}$, déterminer la valeur de l'intégrale $I + J$.
4. En déduire la valeur de I et de J.

Exercice 8.3 (★★)
À l'aide du changement de variable $u = t^2$ puis d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 8.4 (★★)
1. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.
2. À l'aide du changement de variable $u = t^2$ puis d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$ converge.
3. Montrer que la fonction $f : t \mapsto \sin(t^2)$ n'a pas de limite en $+\infty$ (construire deux suites qui tendent vers $+\infty$ dont les images par f n'ont pas la même limite).

Exercice 8.5 (★★)
On note, sous réserve d'existence :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}, \quad J_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}, \quad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}.$$

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, l'existence de I_n, J_n, K_n.
   Quelle relation y a-t-il entre I_n, J_n, K_n ?
2. On note $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n - J = 0$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on a : $\quad 0 \leq K_n \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$.
4. Conclure sur la limite de I_n.

Exercice 8.6 (★★)
On s'intéresse aux intégrales de Bertrand : $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} \mathrm{d}x.$

1. *Cas où* $\alpha = 1$
   (a) À l'aide de primitives, déterminer la nature des intégrales suivantes :
   $$\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\,(\ln x)^2}, \qquad \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\,\sqrt{\ln x}}, \qquad \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\,\ln x}.$$
   (b) Si $\alpha = 1$, à quelle condition sur $\beta \in \mathbb{R}$ l'intégrale de Bertrand est-elle convergente ?
2. *Cas où* $\alpha > 1$
   (a) Donner la nature des intégrales suivantes : $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\,\ln x}, \qquad \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\,(\ln x)^{-1}}.$
   (b) Soit $\alpha > 1$ quelconque. À quelle condition sur $\beta \in \mathbb{R}$ l'intégrale de Bertrand correspondante est-elle convergente ?
3. *Cas où* $\alpha < 1$
   (a) Donner la nature des intégrales suivantes : $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(\ln x)^3}, \qquad \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(\ln x)^{-2}}.$
   (b) Soit $\alpha < 1$ quelconque. À quelle condition sur $\beta \in \mathbb{R}$ l'intégrale de Bertrand correspondante est-elle convergente ?

Exercice 8.7 (★★)
Soit f la fonction définie par $\displaystyle f(x) = \int_1^{+\infty} e^{-xt} \frac{\cos t}{t} \,\mathrm{d}t.$

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, l'intégrale définissant $f(x)$ converge. Ainsi, f est une fonction définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que f est bien définie en 0.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2} \,\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2} \,\mathrm{d}t \leq 1.$
   (b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} \mathrm{d}t = 0.$
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

Exercice 8.8 (★★)
Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, sous réserve de convergence, $\displaystyle F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1 + t^3} \,\mathrm{d}t.$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale définissant $F(x)$ converge. Ainsi, F est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est paire.
3. Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa limite en $+\infty$. En déduire le tableau de variation de F (on ne demande pas la valeur de $F(0)$).
4. (a) Montrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a : $\quad |e^{-a} - e^{-b}| \leq |a - b|.$
   (b) En déduire que pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\quad |F(x) - F(y)| \leq |x^2 - y^2|.$
   (c) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.9 (★★)
On considère l'application $f : x \mapsto \int_0^1 (1-t^2)^x \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale $f(x)$ converge si, et seulement si, $x > -1$.
   Ainsi, f est une fonction définie sur $I =]-1, +\infty[$. On admet que f est continue sur I.
2. Montrer que f est décroissante sur I.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall x \in I, \quad (2x+3)f(x+1) = (2x+2)f(x)$.
4. En déduire que $f(x) \underset{x \to -1^+}{\sim} \dfrac{1}{2x+2}$.

Exercice 8.10 (★★)

1. Justifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ converge.

   Soit f la fonction définie par : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.
2. (a) Justifier qu'on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

   (b) À l'aide du changement de variable $u = t^2$ puis d'une intégration par parties, montrer que :
   $$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{4} \int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u.$$
   (c) Montrer que pour tout $x > 0$: $\displaystyle\int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u \leq \frac{e^{-x^2}}{x^3}$.

   (d) Montrer que : $\forall x > 0, \quad \dfrac{e^{-x^2}}{2x} - \dfrac{e^{-x^2}}{x^3} \leq f(x) \leq \dfrac{e^{-x^2}}{2x}$.
   En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Étudier les variations de f.
4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 8.11 (★★)

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^x} \, \mathrm{d}t$ converge.

   On considère alors la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^x} \, \mathrm{d}t$.
2. Montrer que pour tout $x > 1$, on a $|f(x)| \leq \dfrac{1}{x-1} \left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{x-1}$.
3. À l'aide d'intégrations par parties, établir que pour tout $x > 0$:
   $$f(x) = x \left(\frac{2}{\pi}\right)^{x+1} - x(x+1)f(x+2).$$
4. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ (on pourra distinguer les cas $x \in [2, +\infty[$ et $x \in]0, 2[$).
5. Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 8.12 (★★)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-t}}{\sqrt{n^4+t^4}}\mathrm{d}t$ converge.

   On pose alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-t}}{\sqrt{n^4+t^4}}\mathrm{d}t$.

2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Montrer la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. À l'aide d'un encadrement, déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 8.13 (★★)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \sqrt{2\pi}$.

3. Montrer que f est croissante sur $[-1, 1]$.

4. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|f(x)| \leq \dfrac{\pi^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}}|x|$.

   En déduire que f est continue en 0.

---

9 Valeurs propres, vecteurs propres

Exercice 9.1 (★)

Soit a, b et c trois réels non nuls. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(M) = 1$ et calculer $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

2. En déduire les éléments propres de la matrice M.

Exercice 9.2 (★)

Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de M.

2. En déduire les éléments propres de M.

Exercice 9.3 (★)

On considère l'application $f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} a+d & b+c \\ b+c & a+d \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $f^2 = f$.

3. Déterminer les valeurs propres de f, ainsi qu'une base de chacun de ses sous-espaces propres.

4. Déterminer une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de f. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 9.4 (★★)
Soient les matrices $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P = X^3 - X$ est un polynôme annulateur de F.
   En déduire les éléments propres de F.

2. Déterminer le rang de $G - I_3$ et calculer $G\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   En déduire les éléments propres de G.

3. (a) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres communs à F et G.
   (b) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathscr{B}$, ainsi que les matrices $P^{-1}FP$ et $P^{-1}GP$.

4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note H_a la matrice $H_a = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a \\ -2 & 3-a & 4-a \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que pour tout réel a, on a $H_a = aF + (1-a)G$.
   (b) Calculer $(H_a)^n$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9.5 (★★)
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Soit L un élément non nul de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et C un élément non nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
On pose $A = CL$ et $a = LC$.

1. Calculer A^2 en fonction de a et A. Que peut-on en déduire pour le spectre de A ?

2. Montrer que A est de rang 1 (on pourra expliciter A à partir des cœfficients de C et L).

3. Calculer AC et en déduire que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, a\}$.

4. On suppose $a \neq 0$. Montrer que les sous-espaces propres E_0 et E_a sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exercice 9.6 (★★)
Soit a, b, c trois réels. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On introduit $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;/ MA = AM\}$.

1. Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. *On suppose dans cette question que $ac > 0$.*
   Déterminer les éléments propres de A.

3. *On suppose dans cette question que $a\,c > 0$ et $b^2 \neq a\,c$.*

   (a) Montrer qu'on a $E_b(A) \oplus E_{-\sqrt{ac}}(A) \oplus E_{\sqrt{ac}}(A) = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   (b) Soit M un élément de $\mathscr{C}(A)$.
   Soit λ une valeur propre de A, X un vecteur propre associé.
   Montrer que $MX \in E_\lambda(A)$ et en déduire qu'il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $MX = \alpha\,X$.

   (c) En utilisant la question 3.(a), montrer que M est semblable à une matrice diagonale.

   (d) En déduire la dimension de $\mathscr{C}(A)$.

Exercice 9.7 (★★★)

Soit u l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer les endomorphismes v de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $v^2 = u$.

1. (a) Déterminer le rang de $(M - 4I_3)$ et calculer $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. En déduire les valeurs propres de u.

   (b) Déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de u. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

2. Soit v un endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $v^2 = u$.

   (a) Montrer que $v \circ u = u \circ v$.

   (b) En déduire que les sous-espaces propres de u sont stables par v.

   (c) Montrer que la matrice N de v dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale.

   (d) En déduire les quatre seules matrices possibles pour N.

3. Montrer qu'il existe exactement quatre endomorphismes v de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $v^2 = u$ et déterminer leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9.8 (★★★)

Dans tout l'exercice, (A, B) désigne un couple de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$AB - BA = A \quad \text{et} \quad A \text{ non-nulle.} \qquad (*)$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k B - BA^k = kA^k$.

2. En considérant les valeurs propres de l'endomorphisme φ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :
   $$\varphi : M \mapsto MB - BM,$$
   montrer qu'il existe un entier $p \geq 2$ tel que $A^p = 0$.

3. Montrer que $p \leq n$.

4. On étudie à présent le cas $n = 2$.
   (a) Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que :
   $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T.$$
   (b) Montrer que $(*)$ se réécrit alors :
   $$TC - CT = T$$
   où $C = P^{-1}BP$.
   (c) Déterminer l'ensemble des solutions de $(*)$ dans le cas $n = 2$.

Exercice 9.9 (★★★ - QSP ESCP 2007)
Soit φ une forme linéaire non nulle d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit u un vecteur non nul de E. On définit un endomorphisme de E par $f(x) = x + \varphi(x) \cdot u$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Exercice 9.10 (★★★ - D'après oral ESCP 2012)
Soient $f, g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$ et que f admet n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g.
2. Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.
3. Montrer qu'il existe une base de E formée à la fois de vecteurs propres de f et de vecteurs propres de g. Que dire des matrices de f et g dans une telle base ?
4. Soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Déterminer le nombre de matrices $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$ (i.e. le nombre de « racines carrées » de A).

---

10 Variables aléatoires continues

Exercice 10.1 (★★)
On définit le réel $a = \dfrac{\ln\left(\frac{9}{5}\right)}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)}$ et on définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{9}\ln\left(\dfrac{9}{4}\right)\left(\dfrac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a, +\infty[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X admettant f pour densité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. (a) On pose $Y = X - a$. Montrer que Y suit une loi usuelle que l'on déterminera.
   (b) En déduire que X admet une espérance et une variance que l'on déterminera.
4. On pose $Z = e^X$.
   (a) Montrer que Z n'admet pas d'espérance.
   (b) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.

Exercice 10.2 (★★)
Soit $a > 0$ et soit $f_a : t \mapsto \begin{cases} at^{-a-1} & \text{si } t \in [1, +\infty[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Montrer que f_a est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire admettant f_a pour densité.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
   (b) X possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer. Même question pour la variance.
   (c) On pose $Y = \ln(X)$. Déterminer la fonction de répartition de Y, puis reconnaître la loi de Y.

Exercice 10.3 (★★)
Soit α et a des réels strictement positifs et x_0 et λ des réels.
On considère la fonction f définie par $f(x) = \mathbb{1}_{]x_0+a,+\infty[}\lambda\left(\dfrac{a}{x-x_0}\right)^{\alpha+1}$.

1. (a) Déterminer λ pour que f soit la densité d'une variable aléatoire X.
   On dit alors que X *suit la loi de Pareto de paramètres* α*,* a *et* x_0.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de X.
   (c) Étudier l'existence et la valeur éventuelle de $E(X)$.
   (d) Étudier l'existence et la valeur éventuelle de $V(X)$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Pareto de paramètres α, a et x_0. Soit $s \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.
   Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = rX + s$.
3. (a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. Soit $\beta > 0$ et $\gamma > 1$.
   Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \beta\gamma^X$.
   (b) Soit Z une variable aléatoire suivant la loi de Pareto de paramètres α, a et 0. Soit $c > 0$.
   Déterminer la loi de la variable aléatoire Z^c.

Exercice 10.4 (★★)
Soit $a \geq 0$ et $b > 0$. On considère la fonction $f_{a,b}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_{a,b}(x) = \dfrac{1}{b}\exp\left(-\dfrac{x-a}{b}\right) & \text{si } x \geq a \\ f_{a,b}(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que $f_{a,b}$ est bien une densité de variable aléatoire.

   On note $\mathscr{E}(a,b)$ la loi associée.
   On considère désormais une variable aléatoire X de loi $\mathscr{E}(a,b)$.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. On pose $Y = X - a$.
   (a) Déterminer la loi de Y et la reconnaître.
   (b) En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

4. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$.
   Montrer que la variable aléatoire $-b\ln(1-U)+a$ suit une loi $\mathscr{E}(a,b)$.

Exercice 10.5 (★★)
On considère la fonction $f : t \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } t < 0, \\ 2te^{-t^2} & \text{si } t \geq 0. \end{array} \right.$

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire à densité T qui admet f pour densité.
2. Déterminer la fonction de répartition de T.
3. Déterminer le réel μ, appelé médiane de T, tel que $P(T \leq \mu) = \dfrac{1}{2}$.
4. Montrer que T admet une espérance et une variance et les déterminer.
5. On pose $Y = -2T$. Justifier que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y.
6. On pose $Z = T^2$. Montrer que Z suit une loi usuelle que l'on déterminera.

On s'intéresse à un appareil et plus particulièrement à la durée pendant laquelle il va fonctionner à partir de sa mise en service avant de tomber en panne. Cette durée, exprimée en heures, est modélisée par la variable aléatoire réelle T étudiée plus haut.
Si l'appareil fonctionne toujours au bout de x heures, on note $\Pi_x(h)$ la probabilité qu'il tombe en panne dans les h heures qui suivent.
On appelle taux de panne à l'instant x et on note $\pi(x)$ le nombre dérivé $\Pi_x'(0)$ s'il existe.

6. Exprimer $\Pi_x(h)$ à l'aide d'une probabilité conditionnelle, puis de la fonction de répartition de T.
7. Calculer le taux de panne en tout instant et tracer sa courbe représentative.

Exercice 10.6 (★★)
Soit X une variable aléatoire de densité f paire et continue sur $\mathbb{R}$.
On pose $Y = X^2$ et on suppose que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.
Déterminer f.

Exercice 10.7 (★★)
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On suppose que X suit la loi uniforme sur $[-1, \frac{3}{2}]$.

1. Montrer que $|X|$ est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de $|X|$.
2. Par deux méthodes, montrer que $|X|$ admet une espérance et la déterminer.

Exercice 10.8 (★★)
Soit X une variable aléatoire de densité f continue et telle que $E(X^2)$ existe.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto tP(|X| \geq t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si x est un réel strictement positif, on a :
$$0 \leq x^2 P(|X| \geq x) \leq \int_{-\infty}^{-x} t^2 f(t)\mathrm{d}t + \int_{x}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t.$$
   En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 P(|X| \geq x) = 0$.

3. Soit x un réel positif. Montrer que :
$$\int_0^x tP(|X|\geq t)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}P(|X|\geq x)+\frac{1}{2}\int_{-x}^x t^2 f(t)\mathrm{d}t.$$
En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} tP(|X|\geq t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{E(X^2)}{2}$.

Exercice 10.9 (★★★)

Soit Z une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$. On pose $X=e^Z$.

1. On suppose que Z suit la loi normale centrée réduite.
On dit alors que X *suit la loi log-normale de paramètres* 0 *et* 1.
   (a) Montrer que X est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de X.
   (b) Soit $\alpha>0$. Montrer que X^α admet une espérance et déterminer $E(X^\alpha)$.
   (c) En déduire que X admet une espérance et une variance et les déterminer.
2. On suppose maintenant que Z suit la loi normale de paramètres m et σ^2 (où $m\in\mathbb{R}$ et $\sigma\in\mathbb{R}_+^*$).
On dit alors que X *suit la loi log-normale de paramètres* m *et* σ^2.
   (a) Montrer que la variable aléatoire $X^*=(e^{-m}X)^{\frac{1}{\sigma}}$ suit la loi log-normale de paramètres 0 et 1.
   (b) Montrer que X admet une espérance et une variance et les déterminer.

Exercice 10.10 (★★★ - QSP ESCP 2018)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0,n[$. On note Y la partie entière de X, et $Z=X-Y$.
Déterminer la loi de Y, puis celle de Z.

Exercice 10.11 (★★★ - QSP HEC 2013)

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$ suivant la loi normale d'espérance m et de variance égale à 1. Soit b un réel strictement positif fixé.

1. Montrer que l'application $a\mapsto P(a<X<a+b)$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admet un maximum atteint en un point a_0 que l'on déterminera.
2. Exprimer la valeur de ce maximum à l'aide de la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.
3. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 10.12 (★★★ - QSP ESCP 2012)

Soit $f : x\mapsto \begin{cases} \frac{1}{\ln(2)}\frac{1}{1+x} & \text{si } 0\leq x\leq 1,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire admettant X pour densité. Montrer que $Y=\frac{1}{X}-\lfloor\frac{1}{X}\rfloor$ a même loi que X.

---

11 Produit scalaire, espace euclidien

Exercice 11.1 (★)

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$, on considère l'application f qui, à tous vecteurs P et Q de $\mathbb{R}_n[x]$, associe :

$$f(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k).$$

1. Montrer que f définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$ et déterminer la norme euclidienne associée.
2. Déterminer $\langle x^p, x^q \rangle$ pour tout couple $(p,q) \in (\llbracket 0,1,2 \rrbracket)^2$.

Exercice 11.2 (★)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Pour tout couple (X,Y) de vecteurs-colonnes de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(X,Y) = {}^tXAY$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On note désormais : $\langle X,Y \rangle = \varphi(X,Y)$.
2. On note $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Déterminer $\langle E_p, E_q \rangle$ pour tout couple $(p,q) \in \{1,2,3\}^2$.

Exercice 11.3 (★)

Pour des matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on définit $\langle A,B \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. On note $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer que la famille (X,Y,Z,T) est orthogonale. En déduire une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \langle \cdot,\cdot \rangle)$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Exprimer les coordonnées de A dans la base $\mathscr{B}$.
4. Montrer que la base canonique $\mathscr{C} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$.
5. Déterminer la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$.

Exercice 11.4 (★)

On considère, pour tous polynômes P,Q à cœfficients réels :

$$\Phi(P,\,Q) = (PQ)(0) + \int_{-1}^{1} P'(t)\,Q'(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.
   On note désormais $\langle P,Q \rangle = \Phi(P,Q)$.
2. Déterminer $\langle x^p, x^q \rangle$ pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

3. Montrer que la famille $(1, x, x^2, x^3 - x)$ est une famille orthogonale.
4. En déduire une famille orthonormée de $\mathbb{R}_3[x]$ qui est également une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

Exercice 11.5 (★★)

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $c_k : t \mapsto \cos(kt)$ et $s_k : t \mapsto \sin(kt)$.

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur E en posant :

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ et $t \in [-\pi, \pi]$.
   Écrire $\cos(mt)\cos(nt)$ et $\sin(mt)\sin(nt)$ comme une somme de deux cosinus.
3. (a) Déterminer la norme de c_k et de s_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $(c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, \ldots, c_n, s_n)$ est orthogonale.
   (c) En déduire une famille orthonormale de E.

Exercice 11.6 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On définit pour tout $(M, N) \in E^2$:

$$\Phi(M, N) = \mathrm{Tr}({}^tM \times N).$$

1. (a) Si $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$, exprimer $\Phi(M, N)$ en fonction des cœfficients $m_{i,j}$ et $n_{i,j}$.
   (b) Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note désormais : $\langle M, N \rangle = \Phi(M, N)$.
   (c) Pour $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice dans tous les cœfficients valent 0 sauf celui sur la i-ème ligne et la j-ème colonne qui vaut 1.
   Déterminer pour tout $(i, j, k, l) \in \{1, \ldots, n\}^4$, $\langle E_{i,j}, E_{k,l} \rangle$.
2. Soit $\mathscr{S}_n$ (resp. $\mathscr{A}_n$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) d'ordre n.
   (a) Montrer que $\mathscr{S}_n \perp \mathscr{A}_n$.
   (b) Déterminer une base de $\mathscr{S}_n$ et une base de $\mathscr{A}_n$.
   (c) Montrer que ces familles sont orthogonales.
   En déduire une base orthonormée de $\mathscr{S}_n$ et une base orthonormée de $\mathscr{A}_n$.
   (d) Montrer que $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ sont supplémentaires dans E.
   (e) En déduire une base orthonormée de E.

Exercice 11.7 (★★★)

1. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[x]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que cette application définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

3. On définit la suite de polynômes $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = x \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ T_{k+2} = 2xT_{k+1} - T_k.$$

   Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $T_k(\cos(x)) = \cos(kx)$.

4. Montrer que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$.
   On pourra poser $t = \cos(x)$.

5. Calculer $\|T_k\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 11.8 (★★★★)

On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[x]$, et on pose pour tout $(P, Q) \in E^2$:

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $0 \leq p \leq n$, on pose $Q_p(x) = x^p(x-1)^p$ et $L_p = Q_p^{(p)}$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

2. Montrer que L_p est un polynôme dont on précisera le degré et le coefficient dominant.

3. Calculer par intégration par parties $\langle L_p, L_q\rangle$ pour $p \neq q$. En déduire que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Montrer que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, L_p est orthogonal à $\mathbb{R}_{p-1}[x]$.

5. Déterminer enfin la norme euclidienne de L_p.

---

12 Couples de variables à densité