2023 - 2024

Exercices de colle en ECG2 maths approfondies

0 Suites, fonctions d'une variable réelle, polynômes

Exercice 0.1 (★★ - Une suite récurrente)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \exp(-x-1)$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(\alpha) = \alpha$, et que $0 \leq \alpha \leq 1$.
   (b) Tracer le graphe de f ainsi que la droite d'équation $y = x$ à l'aide de `Python`, et déterminer graphiquement une valeur approchée de α.
   (c) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $|f(x) - f(y)| \leq e^{-1}|x - y|$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq e^{-1}|u_n - \alpha|$.
   En déduire que $|u_n - \alpha| \leq e^{-n}|u_0 - \alpha|$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
   (c) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def approx(eps)` qui, pour $\varepsilon > 0$, renvoie une approximation de α à ε près.

Exercice 0.2 (★★ - Racines réelles d'un polynôme)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.

1. Montrer que P_n est divisible par $(X-1)^3$.
2. Quelles sont les racines réelles de P_n'' ?
3. (★) Montrer que P_n admet au plus 4 racines réelles distinctes.

Exercice 0.3 (★★★ - QSP ESCP 2017)

On considère deux suites réelles u et v définies par leurs premiers termes u_0 et v_0 strictement positifs et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_{n+1}}(u_{n+1} - u_n)$.
2. Montrer que les suites u et v divergent vers $+\infty$.

Exercice 0.4 (★★★ - QSP ESCP 2016)

1. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ est strictement monotone.
2. En déduire que si P est un polynôme réel tel que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$, alors $P = X$.

Exercice 0.5 (★★★ - QSP ESCP 2016)

On dit qu'une application f de E dans E admet x pour point fixe si $f(x) = x$.

Soit f et g deux applications définies sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,1]$, continues et telles que $f \circ g = g \circ f$ et $f \leq g$.

1. Montrer que f admet au moins un point fixe x_0 et qu'alors $g(x_0)$ est encore point fixe pour f.
2. En utilisant une suite définie à partir de x_0, montrer que f et g ont un point fixe commun.

---

1 Calcul matriciel

Exercice 1.1 (★★★ - Inspiré de QSP ESCP 2021)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}.$$

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Exemples.
   (a) Déterminer $\mathscr{C}(I_n)$. Quelle est sa dimension ?
   (b) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des réels deux à deux distincts, et soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\mathscr{C}(D)$. Quelle est sa dimension ?
3. Déterminer $\max\limits_{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$.
4. On suppose que $n = 2$ dans cette question. On cherche à déterminer $\min\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$.
   (a) Montrer que $\min\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) \leq 2$.
   (b) Supposons qu'il existe $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\dim(\mathscr{C}(A)) \leq 1$.
      i. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$.
      ii. Aboutir à une contradiction et conclure.

Exercice 1.2 (★★★ - Inspiré d'une QSP HEC)

Soit n un nombre supérieur ou égal à 2.
On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *nilpotente* s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que M^k est la matrice nulle.

1. (a) Donner un exemple de matrice nilpotente non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Une matrice nilpotente peut-elle être inversible ? Que dire de son rang ?
   (c) Montrer qu'une matrice nilpotente semblable à une matrice diagonale est nécessairement la matrice nulle.
2. On appelle *indice de nilpotence* d'une matrice nilpotente M le plus petit entier strictement positif k tel que M^k est la matrice nulle.

   Le programme `Python` suivant, dont le code est incomplet, permet de calculer l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente.

```
import numpy as np

A = input("Entrer une matrice nilpotente")
k = 1
B = A
while np.sum(np.abs(B))>0 :
    k = ...
    B = ...
print(...)
```

(a) Expliquer en détail la ligne de code `while np.sum(np.abs(B))>0`.
(b) Compléter le code du programme.

3. Soit M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ nilpotente.
   (a) Montrer que la matrice $A = I_n - M$ est inversible et déterminer son inverse.
   (b) Montrer que $I_n - A^{-1}$ est nilpotente.

---

2 Séries numériques

Exercice 2.1 (★★)
Nature de $\sum \dfrac{1 + 1/2 + \cdots + 1/n}{1 + 2 + \cdots + n}$.

Exercice 2.2 (★★)
Pour $\alpha > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Étudier la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{R_n}{S_n}$.

Exercice 2.3 (★★)
Étudier la nature des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k}$ et $v_n = \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

Exercice 2.4 (★★ - Test de condensation de Cauchy)
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de réels positifs.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $2^k a_{2^{k+1}} \leq \displaystyle\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n \leq 2^k a_{2^k}$.

2. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} 2^k a_{2^k} \leq \sum_{n=1}^{2^p-1} a_n \leq \sum_{k=0}^{p-1} 2^k a_{2^k}.$$

3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{k\geq 0} 2^k a_{2^k}$ converge.

4. *Application :* Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.

Exercice 2.5 (★★)
1. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$.

2. À l'aide d'un équivalent, déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (\ln n) \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Exercice 2.6 (★★)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^n$.

1. Déterminer suivant la valeur du paramètre α la limite de la suite (u_n).
2. Déterminer suivant la valeur du paramètre α la nature de la série $\sum(u_n - 1)$.

Exercice 2.7 (★★)

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$.

   On pourra distinguer les cas où $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$.

2. Montrer que $\frac{1}{n\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$.

   En déduire la nature de la série de terme général $\frac{1}{n\ln(n)}$.

Exercice 2.8 (★★★ - Inspiré d'un oral ESCP 2021)

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. On dit que le produit $\prod u_n$ converge si la suite (v_n) définie par $v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$ admet une limite non nulle ℓ, et l'on note alors :

$$\ell = \prod_{k=1}^{+\infty} u_k.$$

1. (a) Montrer que si $\prod u_n$ converge, alors $\lim u_n = 1$.

   (b) Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est divergent. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?

   (c) Étudier la convergence du produit $\prod_{n\geq 2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

2. Dans cette question, on suppose que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :

   (1) le produit $\prod(1 + u_n)$ converge ;

   (2) la série $\sum \ln(1 + u_n)$ converge ;

   (3) la série $\sum u_n$ converge.

3. Étudier la convergence du produit $\prod_{n\geq 2} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

Exercice 2.9 (★★★ - QSP HEC 2008)

Représenter dans le plan l'ensemble des points de coordonnées $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que la série de terme général $u_n = \frac{a^n}{1 + b^n}$ soit convergente.

Exercice 2.10 (★★★ - QSP HEC 2014)

Soit α un réel donné. Pour tout $n \geq 1$, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$.

1. Étudier suivant les valeurs de α, la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$. En cas de convergence, on précisera la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

2. Étudier la nature de la série de terme général u_n.

3. Soit x un réel vérifiant $|x| < 1$. Étudier suivant les valeurs du réel α, la convergence de la série de terme général $u_n x^n$.

Exercice 2.11 (★★★ - Extrait de EML 2012)
On note, pour tout entier $n \geq 1$, $A_n = \dfrac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.
On note, pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = -1 - \left(n - \dfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

1. À l'aide d'un développement limité, déterminer un équivalent simple de la suite a_n.
   En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} a_n$ converge.

2. Montrer, pour tout entier $n \geq 2$, que $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.

3. En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et que sa limite ℓ est strictement positive.

4. Justifier que $n! \sim \dfrac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

Exercice 2.12 (★★★)
Soit a et b deux réels. Discuter la convergence de la série de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$.

Exercice 2.13 (★★★)
Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{a_n}{(1+a_0)\dots(1+a_n)}$.

1. Montrer que la série v_n converge.

2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 1 \Leftrightarrow \sum a_n$ diverge.

Exercice 2.14 (★★★)
On donne $a \in \mathbb{R}_+^*$. Discuter suivant a, la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{n^a}{\displaystyle\prod_{p=1}^{n}(1+a^p)}.$$

Exercice 2.15 (★★★)
Discuter la nature de la série de terme général :

$$u_n = \left(\sqrt{n^2+an+2} - \sqrt{n^2+bn+1}\right)^n.$$

---

3 Calculs de probabilités

Exercice 3.1 (★★)

Un signal binaire (de valeur 1 ou -1) doit transiter par n relais. Au passage de chaque relais, le signal a une probabilité p $(0 < p < 1)$ d'être inversé. On suppose que les relais sont indépendants. On note p_n la probabilité pour que le signal transmis soit identique au signal initial.

1. Montrer que :
$$p_n = p + (1 - 2p)p_{n-1}.$$
2. En déduire une expression générale de p_n et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3.2 (★★)

Un enfant saute d'un sommet à un autre d'un triangle de sommets A, B, C tracé à la craie sur le sol (un saut vertical est admis). Il joue de la manière suivante :

- s'il est au sommet A ou au sommet B, il sautera vers le sommet A, B ou C avec la même probabilité ;
- s'il est au sommet C, il saute toujours vers le sommet A.

Avant le premier saut, l'enfant se trouve en A. La probabilité pour que l'enfant soit en A (resp. B, C) après le n-ème saut est notée a_n (resp. b_n, c_n).

1. (a) Déterminer des relations de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n.
   (b) Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$
   (c) En déduire que pour tout entier n, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.
2. (a) Déterminer un polynôme annulateur P de degré 3 de A.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ tels que :
$$X^n = P \times Q_n + \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n.$$
   (c) Déterminer $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ en fonction de n.
   (d) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.
3. Donner une expression des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3.3 (★★)

Un laboratoire fabrique un alcool-test et les essais montrent que :

- 2% des personnes contrôlées sont en état d'ébriété ;
- 95 fois sur 100 l'alcool-test a donné un résultat positif alors que la personne était en état d'ébriété ;
- 95 fois sur 100 l'alcool-test a donné un résultat négatif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété.

1. On essaie l'appareil sur une personne et on constate que le résultat est positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?
2. On essaie l'appareil sur une personne et on constate que le résultat est négatif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?
3. Déterminer la probabilité que le résultat donné par l'appareil soit faux.

Exercice 3.4 (★★)
On considère deux urnes contenant chacune 2 boules. Initialement, les urnes sont unicolores : la première contient les deux boules noires et la seconde les deux blanches.

On tire au hasard une boule dans chaque urne et on les intervertit. On enchaîne les tirages de façon indépendante. À chaque étape de ce jeu, on dénombre les boules noires dans la première urne.

Pour n un entier naturel non nul, on note les événements :

- Z_n :« il y a aucune boule noire dans l'urne une » ;
- U_n : « il y a 1 boule noire dans l'urne une » ;
- D_n : « il y a 2 boules noires dans l'urne une ».

Pour la suite, on notera : $z_n = P(Z_n)$, $u_n = P(U_n)$ et $d_n = P(D_n)$.

1. Déterminer ces trois valeurs à l'étape $n = 0$ et $n = 1$.
2. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer u_{n+1} en fonction de z_n, u_n et d_n.
3. En déduire une relation entre u_{n+1} et u_n.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3.5 (★★★ - QSP HEC ECE 2014)
On dispose de n urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$, et on dispose 3 boules dans chaque urne.
Dans l'ensemble des $3n$ boules, une seule est bleue, les autres sont rouges.
Sachant que l'on a tiré sans remise deux boules rouges dans l'urne U_1, quelle est la probabilité que la boule bleue se trouve dans l'urne U_2 ?

Exercice 3.6 (★★★★ - Loi du zéro-un de Borel)
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On note $p_n = P(A_n)$.

On note $B = \displaystyle\bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$.

1. Expliquer pourquoi on a :
$$B = \{\omega \in \Omega,\ \omega \text{ appartient à une infinité des } A_n\}.$$
2. On suppose que la série $\displaystyle\sum_k P(A_k)$ converge. Montrer que $P(B) = 0$.
3. On suppose que les évènements (A_n) sont indépendants, et que la série $\displaystyle\sum_k P(A_k)$ est divergente.
   (a) Montrer que l'évènement $\overline{B}$ est égal à $\displaystyle\bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n} \overline{A_k}\right)$.

(b) Exprimer $P\left(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right)$ en fonction des p_k.

(c) Montrer que la série $\sum_k \ln(1-p_k)$ est divergente.

On pourra pour cela discuter des cas $p_k \to 0$ et $p_k \nrightarrow 0$.

(d) En déduire que $P(B) = 1$.

Exercice 3.7 (★★★★ - Oral ESCP 2015)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N et on extrait ces N boules une à une et sans remise. Pour $i \in [\![1, N]\!]$, le numéro i est dit bien placé si ce numéro apparait lors du i-ème tirage. On considère les évènements :

- B_i : « le numéro i est bien placé ».
- $E_{N,k}$: « au cours de l'expérience, exactement k numéros sont bien placés ».

L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Les évènements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
2. Pour $1 \leq j \leq N$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq N$, calculer la probabilité de l'évènement :
$$A_{i_1,i_2,\ldots,i_j} = \text{« les numéros } i_1, i_2, \ldots, i_j \text{ sont bien placés ».}$$
On admet que $P(E_{N,0}) = 1 - \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq n} P(A_{i_1,i_2,\ldots,i_j})$.
3. En déduire que : $P(E_{N,0}) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!}$.
4. Montrer la relation : $P(E_{N,k}) = \frac{1}{k!} P(E_{N-k,0})$.
5. Pour k fixé, montrer que la suite $(P(E_{N,k}))_{N \geq 0}$ est convergente. On note p_k sa limite. Montrer que la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définit une probabilité sur $\mathbb{N}$, et reconnaitre la loi correspondante.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$:
$$S_{2p+1} \leq S_{2p+3} \leq \frac{1}{e} \leq S_{2p+2} \leq S_{2p}.$$
En déduire, pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$, que :
$$\sum_{j=0}^{n} |P(E_{N,j}) - p_j| \leq \frac{e}{(N+1-n)!}.$$

Exercice 3.8 (★★★★)

On considère le problème suivant (appelé problème des chapeaux) : n personnes laissent leur chapeau à un vestiaire. En repartant, chaque personne reprend un chapeau au hasard. Quelle est la probabilité qu'aucun ne reprenne son propre chapeau ?

Afin de modéliser cette expérience aléatoire, on prendra pour univers Ω l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, associant une personne le chapeau qu'elle prend en sortant, et $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$.

1. Déterminer le cardinal de Ω.

2. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'évènement « la i-ème personne repart avec son chapeau ». Justifier que la probabilité de A_i est égale à $\dfrac{(n-1)!}{n!}$

3. Plus généralement, si $k \in [\![1, n]\!]$, et $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, déterminer la probabilité de l'évènement $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$.

4. En déduire la probabilité de $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

   On pourra utiliser sans démonstration que $n \geq 2$ et pour tout évènement $A_1, \ldots, A_n$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \right).$$

5. Conclure en donnant la probabilité que personne ne reparte avec son propre chapeau.

6. Quelle est approximativement la probabilité qu'aucune personnes n'ait repris son chapeau quand n est grand ?

---

4 Espaces vectoriels

Exercice 4.1 (★)

Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les deux sous-ensembles suivants :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \text{ et } G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4.2 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.
Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on note $f_k : x \mapsto |x - a_k|$.
Montrer que la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 4.3 (★★)

On note $E = \mathbb{C}_4[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 4.
Soient a et b deux nombres complexes distincts. On considère le sous-ensemble de E suivant :

$$F = \{P \in E,\ P(a) = 0 \text{ et } P(b) = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et trouver une base de ce sous-espace.

Exercice 4.4 (★★)

Soit $\mathscr{S}_3(\mathbb{C})$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ formé des matrices symétriques, et $\mathscr{A}_3(\mathbb{C})$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ formé des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathscr{S}_3(\mathbb{C})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{C})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\mathscr{M}_3(\mathbb{C}) = \mathscr{S}_3(\mathbb{C}) \oplus \mathscr{A}_3(\mathbb{C})$.

   Quelle est l'unique décomposition de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ comme somme d'un élément de $\mathscr{S}_3(\mathbb{C})$ et d'un élément de $\mathscr{A}_3(\mathbb{C})$?
3. Déterminer une base de $\mathscr{A}_3(\mathbb{C})$. Quelle est la dimension de $\mathscr{S}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 4.5 (★★)
Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 3x + y + z = 0 \text{ et } x + z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.
Soient $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, 0, 1)$ et $c = (0, 1, 1)$. On pose $G = \text{Vect}(a)$.

1. Montrer que E, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de E. Quelle est la dimension de E ?
3. Montrer que (b, c) est une base de F.
4. A-t-on $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$?
5. Montrer que (a, b, c) est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?
7. Soit $u = (2, 4, 7)$. Exprimer u dans la base (a, b, c).

Exercice 4.6 (★★)
Dans $\mathbb{R}_4[X]$, on pose $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \ :\ P(0) = 0\}$, $G = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \ :\ P(4) = 0\}$ et $H = F \cap G$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ et en donner une base.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ et en donner une base formée de puissances de $(X - 4)$.
3. Montrer que $H = \{X(X - 4) \times Q,\ Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$. En déduire une base de H.
4. Déterminer un supplémentaire de H dans E.

Exercice 4.7 (★★)
Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des suites réelles p-périodiques, c'est-à-dire l'ensemble des suites (u_n) telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(n + p) = u(n).$$
Par exemple, la suite :
$$u = (u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 3, u_3 = 1, u_4 = 2, u_5 = 3, u_6 = 1, \dots)$$
est une suite 3-périodique.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. On considère la famille de suites $(U_i)_{0\leq i\leq p-1}$ définie pour tout $0 \leq i \leq p-1$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{si il existe } k \in \mathbb{N},\ n = i + kp \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases},$$

soit en d'autres termes si :

$$U_i = (\underbrace{0,\dots,0,\overbrace{1}^{i^{\text{ème}}\text{ position}},0,\dots,0}_{p \text{ termes}},\underbrace{0,\dots,0,\overbrace{1}^{(i+p)^{\text{ème}}\text{ position}},0,\dots,0}_{p \text{ termes}},\dots).$$

   (a) Montrer que les suites U_i appartiennent à E.

   (b) Montrer la famille (U_i) avec $0 \leq i \leq p-1$ est libre.

   (c) Donner une base de E. En déduire la dimension de E.

Exercice 4.8 (★★★)

Soit $n \geq 1$ fixé. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose $F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \ :\ \forall j \in [\![, n]\!] \setminus \{i\},\ P(j) = 0\}$.

1. Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$, et que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $P \in F_i$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda \displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (X - j)$.

2. Montrer que la somme $F_0 + F_1 + \cdots + F_n$ est directe.

3. En déduire que $\mathbb{R}_n[X] = \displaystyle\bigoplus_{i=0}^{n} F_i$.

---

5 Variables aléatoires discrètes

Exercice 5.1 (★)

Une urne contient une boule noire et une boule blanche. On tire une boule de l'urne. Si elle est blanche alors on remet la boule dans l'urne et on y ajoute une boule noire. Si elle est noire alors on remet simplement la boule dans l'urne. On répète cette opération une infinité de fois.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une boule noire.
On prend comme convention que $X = 0$ si l'on n'obtient jamais de boule noire.

1. Déterminer la loi de X.

2. Montrer que $X + 1$ admet une espérance et calculer sa valeur.
   En déduire l'existence et la valeur de $E(X)$.

Exercice 5.2 (★★)

On dispose d'une pièce équilibrée. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur k si l'on obtient pour la première fois *pile* puis *face* aux lancers $(k-1)$ et k (avec $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$), X prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.
On note P_1 l'événement « on obtient *pile* au premier lancer ».

1. Déterminer $P_{P_1}(X = k)$ pour tout $k \geq 2$.
   Justifier que $P_{\overline{P_1}}(X = k) = P(X = k-1)$ pour tout $k \geq 3$.

2. En déduire que pour tout $k \geq 3$, $P(X = k) = \dfrac{1}{2}P(X = k-1) + \dfrac{1}{2^k}$.

3. Pour tout $k \geq 2$, on pose $u_k = 2^k P(X = k)$. Montrer que la suite $(u_k)_{k\geq 2}$ est arithmétique.

   En déduire la loi de X.

4. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 5.3 (★★)
Soit $c \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, et on note sa couleur. On la remet alors dans l'urne avec c boules de la couleur tirée.

On répète cette opération, et on réalise ainsi une succession de tirages.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale à 1 si on obtient une boule blanche au n-ème tirage, et 0 sinon.

Soit S_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors des n tirages.

1. Déterminer la loi de X_1.

2. (a) Montrer que :
$$P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) = \frac{1+c}{2+c}.$$
   (b) Montrer que X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Donner $S_n(\Omega)$, et exprimer S_n en fonction de $X_1, \ldots, X_n$.

   (b) Montrer que :
$$P_{[S_n=k]}(X_{n+1} = 1) = \frac{1+ck}{2+cn}.$$
   (c) On note $E(S_n)$ l'espérance de la variable aléatoire S_n. Montrer que la variable X_{n+1} suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1+cE(S_n)}{2+cn}$.

Exercice 5.4 (★★)
On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée. A chaque lancer, à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on marque un point.
Pour $n \geq 2$, soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus à l'issu de n lancers.

1. Déterminer les lois , les espérances et les variances de X_2 et X_3.

2. Soit $n \geq 2$, quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n? Déterminer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n-1)$.

3. Soit $n \geq 2$, soit $k \in [\![1, n]\!]$, montrer que :
$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(X_n = k) + \frac{1}{2}P(X_n = k-1).$$

4. Soit $n \geq 2$. On pose $Q_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)s^k. \end{array}$

   (a) Soit $n \geq 2$. Calculer $Q_n(1)$ et montrer que $Q_n'(1) = E(X_n)$. Exprimer $V(X_n)$ à l'aide de la fonction Q_n.

(b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$Q_{n+1}(s) = \frac{(1+s)}{2} Q_n(s).$$

En déduire une expression de $Q_n(s)$ en fonction de n et de s.

(c) Calculer alors, pour tout $n \geq 2$, l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 5.5 (★★)

On considère un processus binomial de paramètre $p \in]0,1[$, c'est-à-dire une suite d'épreuves indépendantes telles que chaque épreuve conduit à un succès avec probabilité p ou à un échec avec probabilité $q = 1 - p$.

Dans tout l'exercice, on fixe un entier $r > 0$. On admettra que si $x \in]-1,1[$, alors la série $\sum_{n \geq r} \binom{n}{r} x^{n-r}$ converge et sa somme vaut $\frac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

1. On note X_r le rang d'apparition du r-ème succès.
   (a) Que dire de X_1 ?
   (b) Quel est l'ensemble V des valeurs que X_r peut prendre ?
   (c) Montrer que pour tout $k \in V$, $P(X_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$.
   On dit que X_r suit la *loi de Pascal de paramètre* (r, p).
2. (a) Montrer que $E(X_r)$ existe et vaut $\frac{r}{p}$.
   (b) Montrer que $E(X_r(X_r+1))$ existe et la calculer. En déduire que X_r admet une variance qui vaut $\frac{rq}{p^2}$.

Exercice 5.6 (★★)

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce telle que la probabilité d'apparition de *pile* soit égale à p ($p \in]0,1[$). Soit N un entier naturel non nul fixé. On effectue N lancers du dé. Si n est le nombre de *6* obtenus, on lance alors n fois la pièce.
On définit deux variables aléatoires X et Y de la manière suivante :

- X indique le nombre de *6* obtenus aux lancers de dés,
- Y indique le nombre de *pile* obtenus aux lancers de la pièce.

1. Déterminer la loi de X.
2. Pour tout $n \in X(\Omega)$, déterminer la loi de Y conditionnellement à l'événement $[X = n]$.
3. (a) Montrer que pour tout $(n, N) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq n \leq N$, on a $n\binom{N}{n} = N\binom{N-1}{n-1}$.
   (b) En déduire l'espérance de Y.
4. Simulation `Python`.
   (a) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simul(N,p)` renvoyant une réalisation de la variable Y.
   (b) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def Simul(N,p,l)` renvoyant un vecteur de taille ℓ contenant n réalisations indépendantes de la variable X.

(c) À l'aide de la fonction `Simul`, déterminer une estimation de $E(X)$ pour différentes valeurs de N et p et vérifier ainsi le résultat de la question 3.(b).

Exercice 5.7 (★★)
On dispose de $(n+1)$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_n$, chaque urne U_k contenant $(k+1)$ boules numérotées de 0 à k. On tire une première boule dans l'urne U_n, dont le numéro indique dans quelle urne on tirera une seconde boule. On note K le numéro de la première boule tirée, X le numéro de la deuxième.

1. Déterminer $E(X|[K=k])$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
2. En déduire $E(X)$.
3. Montrer que la loi de X est donnée par $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(X = i) = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=i}^{n} \dfrac{1}{k+1}$.
4. Retrouver l'espérance de X grâce à la question précédente.

Exercice 5.8 (★★)
On procède à des lancers successifs de pièces de monnaie avec probabilité $p \in]0, 1[$ d'obtenir « pile ». On compte alors, parmi les premiers lancers, combien donnent le même résultat avant que l'autre côté de la pièce n'apparaisse. On note L la variable aléatoire associée à ce décompte.

1. Soit P_1 l'événement « obtenir pile au premier lancer ».
   Déterminer $P_{P_1}(L \geq n)$ pour tout $n \geq 1$.
2. Déterminer l'espérance conditionnelle $E(L|P_1)$.
3. Déterminer l'espérance de L.

Exercice 5.9 (★★★)
Soit $n \geq 2$. Un lecteur mp3 contient n pistes de lectures (numérotées de 1 à n) et fonctionne en mode aléatoire (à la fin de chaque piste, une nouvelle, éventuellement égale à l'ancienne, est choisie aléatoirement). Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k le nombre de pistes différentes qui ont été lues au moins une fois au cours des k premières lectures.

1. Déterminer, en fonction de n et de k, les valeurs prises par X_k.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, donner la probabilité des événements $X_k = 1$ et $X_k = k$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$, montrer que :
$$P(X_{k+1} = i) = \frac{n-i+1}{n} P(X_k = i-1) + \frac{i}{n} P(X_k = i).$$
4. En déduire que $E(X_{k+1}) = \dfrac{(n-1)}{n} E(X_k) + 1$, puis déterminer une expression de $E(X_k)$.
5. Pour n fixé, que vaut $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} E(X_k)$. Ce résultat est-il prévisible ?
6. Pour k fixé, que vaut $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} E(X_k)$. Ce résultat est-il prévisible ?

---

6 Applications linéaires

Exercice 6.1 (★★)

On note φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[x]$ associe le polynôme $\varphi(P) = (x-1)P'(x)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique $\mathscr{C} = (1, x, x^2, x^3)$.
3. Déterminer le rang de φ. Quelle commande permettrait de vérifier votre résultat avec `Python` ?
4. Déterminer une base de $\text{Ker}(\varphi)$ et une base de $\text{Im}(\varphi)$.
5. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
6. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathscr{C}$ à la base $\mathscr{B}$ puis la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$.
7. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.

   On pourra éventuellement s'aider de `Python` *pour les calculs.*

Exercice 6.2 (★★)

On considère $F = \{(x, y, z) | x + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, -1, 1))$.

1. (a) Déterminer une base (e_1, e_2) de F et une base (e_3) de G.
   (b) Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. On considère p le projecteur sur F parallèlement à G.
   (a) Déterminer la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) En déduire la matrice de p dans la base canonique. On pourra pour cela s'aider éventuellement du logiciel `Python` pour les calculs matriciels.
   (c) Donner $p((x, y, z))$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Soit q le projecteur sur G parallèlement à F. Déterminer $q((x, y, z))$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 6.3 (★★)

Soit E un espace vectoriel, F et G des sous-espaces supplémentaires de E, de sorte que pour tout $z \in E$, il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que

$$z = x + y.$$

On définit s la *symétrie par rapport à F dans la direction de G* en posant

$$s(z) = x - y.$$

1. Montrer que s est une application linéaire.
2. Montrer que $s \circ s = Id_E$. En particulier, s est un isomorphisme, et $s^{-1} = s$.
3. Montrer que $F = \text{Ker}(s - Id_E)$ et que $G = \text{Ker}(s + Id_E)$.

4. On suppose que E est de dimension finie n, et on note $k = \dim(F)$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$. Montrer que :

$$M_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 0\dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{k \text{ fois}}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{n-k \text{ fois}}).$$

Exercice 6.4 (★★)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A.

1. Déterminer une base des espaces $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ et $\mathrm{Ker}(A - 2I_3)$.
2. En déduire qu'il existe une base $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathscr{C}$ soit D.
3. Déterminer une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$. Donner P^{-1}.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n. \end{cases}$$

Exercice 6.5 (★★)

Soit $p \in]0,1[$. On note $q = 1 - p$.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & p & 0 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à M.

1. Montrer que $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ 1 \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ -1 \\ p \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ puis la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base canonique.
3. Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathscr{B}$.
4. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $M^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. *Application :* Un mobile se déplace sur un axe d'origine O.
À chaque instant, il est soit en A d'abscisse 1, soit en B d'abscisse -1, soit en O d'abscisse 0.
Si à un instant donné il est en O alors à l'instant suivant, il sera en A avec la probabilité p ou en B avec la probabilité q.
Si à un instant donné il est en A ou en B alors à l'instant suivant, il sera à coup sûr en O.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de ce mobile à l'instant n.
On pose $X_0 = 0$ (le mobile se situe initialement en 0).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = -1) \\ P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{pmatrix}$.
   (a) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = MU_n$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (c) Déterminer alors $P(X_n = -1)$, $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.6 (★★)

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à cœfficients réels, $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$, I la matrice identité d'ordre n.
À chaque matrice $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de E, on associe l'application T_U de E dans $\mathbb{R}$, qui à une matrice M associe la somme des éléments diagonaux du produit UM :

$$M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \mapsto T_U(M) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_{i,j} m_{j,i} = \mathrm{Tr}(UM).$$

1. (a) Montrer que $T_U \in E^*$.
   (b) Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(T_U)$ puis de $\mathrm{Ker}(T_U)$.
2. Un cas particulier : $n = 2$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(T_U)$ est l'ensemble des matrices de E dont la sommes des 4 cœfficients est nulle et qu'il contient au moins une matrice inversible.
3. Montrer que l'application $\varphi : E \to E^*$, $U \mapsto \varphi(U) = T_U$, est une application linéaire bijective.
4. Soit H un hyperplan de E, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de E de dimension $n^2 - 1$.
   (a) Montrer que pour toute matrice A non nulle de E qui n'appartient pas à H, on a : $E = H \oplus \mathrm{Vect}(A)$.
   (b) Pour toute matrice M de E, il existe un unique couple $(N, \alpha) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $M = N + \alpha A$.
   Soit l l'application qui à M associe α. Montrer que $l \in E^*$.
   En déduire l'existence d'une matrice U de E telle que $H = \mathrm{Ker}(T_U)$.

Exercice 6.7 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ associe le polynôme $\varphi(P) = (x-1)P' - xP''$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

3. Déterminer l'image, le rang et le noyau de φ.

Exercice 6.8 (★★)
On note $E = \mathbb{R}_2[x]$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
On considère $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique est M.
Soit $P_1 = x^2 - 1$, $P_2 = x^2 - x + 1$ et $P_3 = x^2 + x + 1$.
On note $V_1 = \mathrm{Vect}(P_1)$ et $V_2 = \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de E.
2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
3. Montrer que f^3 est nul et en déduire un polynôme annulateur de f.
4. Montrer que V_1 et V_2 sont des sous-espaces vectoriels stables par f.
5. On veut déterminer tous les sous-espaces vectoriels stables par f.
   (a) Soit D une droite vectorielle stable par f. Montrer que $D = V_1$.
   (b) Soit Π un plan stable par f et $v = \alpha\, P_1 + \beta\, P_2 + \gamma\, P_3 \in \Pi$.
   Montrer que $(v, f(v), f^2(v))$ est une famille liée. En déduire que $\gamma = 0$ puis que $\Pi = V_2$.
   (c) Conclure.

Exercice 6.9 (★★)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A un élément non nul de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit T l'application définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$T(M) = M - \mathrm{Tr}(M)A.$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On suppose dans cette question que $\mathrm{Tr}(A) = 1$.
   (a) Déterminer un polynôme annulateur de T.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Vect}(A)$.
3. On suppose dans cette question que $\mathrm{Tr}(A) \neq 1$.
   Montrer que T est un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6.10 (★★)
Soit p et q deux projecteurs définis sur un espace vectoriel E.

1. Montrer l'équivalence :

$$[p + q \text{ est un projecteur }] \Leftrightarrow [p \circ q = q \circ p = 0]\,.$$

2. Prouver que lorsque $p + q$ est un projecteur, on a :
   (a) $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$,
   (b) $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

Exercice 6.11 (★★)
Pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, on pose :

$$f(ax^2+bx+c)=(a+3b+3c)x^2+(2b+c)x-2b-c.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ et déterminer sa matrice dans la base canonique.
2. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}_2[x]$.
4. Montrer que f est le projecteur sur F parallèlement à G et préciser F et G.
5. Donner un polynôme annulateur de f.
6. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces stables par f.
7. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[x]$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Exercice 6.12 (★★)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On considère f un endomorphisme de E pour lequel il existe $a\in\mathbb{R}$ non nul tel que $f^3-3af^2+a^2f=0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Ker}(a^2\mathrm{Id}_E-3af+f^2)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Ker}(a^2\mathrm{Id}_E-3af+f^2)=E$.
3. En déduire que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires.

Exercice 6.13 (★★)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient f et g des endomorphismes de E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f\circ g)=\mathrm{Ker}(g)\Leftrightarrow\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(g)=\{0_E\}$.
2. $\mathrm{Im}(f\circ g)=\mathrm{Im}(f)\Leftrightarrow\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(g)=E$.
3. En déduire que $f\circ g$ est un automorphisme si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f)=E$, $\mathrm{Ker}(g)=\{0_E\}$ et $\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(g)=E$.

Exercice 6.14 (★★)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient p_1 et p_2 deux projecteurs de $\mathscr{L}(E)$ et $q=p_1+p_2-p_2\circ p_1$.

1. On suppose dans cette question que $p_1\circ p_2=p_2\circ p_1$.
   (a) Montrer que q est un projecteur.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(q)=\mathrm{Ker}(p_1)\cap\mathrm{Ker}(p_2)$ et $\mathrm{Im}(q)=\mathrm{Im}(p_1)+\mathrm{Im}(p_2)$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}(q)=\mathrm{Im}(p_1)\oplus\mathrm{Im}(p_2)$ si, et seulement si, $q=p_1+p_2$.
2. On suppose dans cette question que $p_1\circ p_2=0$.
   (a) Montrer que q est un projecteur.
   (b) Montrer que, dans ce cas aussi, $\mathrm{Ker}(q)=\mathrm{Ker}(p_1)\cap\mathrm{Ker}(p_2)$ et $\mathrm{Im}(q)=\mathrm{Im}(p_1)+\mathrm{Im}(p_2)$.

Exercice 6.15 (★★★)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E.
On pose :

$$F = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(f^k) \quad \text{et} \quad G = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(f^k).$$

1. (a) Justifier que les suites $\left(\mathrm{Ker}(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\mathrm{Im}(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion. Que peut-on dire des suites $\left(\dim \mathrm{Ker}(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dim \mathrm{Im}(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$?
   (b) En déduire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $F = \mathrm{Ker}(f^p)$ et $G = \mathrm{Im}(f^p)$.
2. Montrer que :
   (i) F et G sont des sous-espaces vectoriels de E stables par f ;
   (ii) l'endomorphisme f induit sur F un endomorphisme f_G nilpotent et sur G un endomorphisme f_G bijectif ;
   (iii) les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E.

On peut montrer l'unicité d'un couple (F, G) vérifiant les trois conditions ci-dessus. On dit que (F, G) réalise la décomposition de Fitting de E pour l'endomorphisme f.

Exercice 6.16 (★★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \dots & \binom{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$.
Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Exercice 6.17 (★★★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

1. Justifier l'existence et l'unicité de $(p_0, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :
$$u^n(x_0) = p_0 x_0 + p_1 u(x_0) + \dots + p_{n-1} u^{n-1}(x_0).$$
2. On pose $P = X^n - p_{n-1}X^{n-1} - \dots - p_1 X - p_0$.
   (a) Montrer que P est un polynôme annulateur de u.
   (b) À l'aide du théorème de division euclidienne, montrer que tout polynôme annulateur de u est un multiple de P.
3. On pose $\mathbb{R}[u] = \{Q(u),\ Q \in \mathbb{R}[x]\}$.
   (a) À l'aide du théorème de division euclidienne, montrer que $\mathbb{R}[u] = \{Q(u),\ Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\}$.
   (b) Montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre. En déduire la dimension de $\mathbb{R}[u]$.
4. On note $\mathscr{C}(u)$ le commutant de u, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u. Montrer que $\mathscr{C}(u) = \mathbb{K}[u]$.

---

7 Couples de variables discrètes

Exercice 7.1 (★)
On considère deux variables aléatoires X et Y telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, \dots, n\}$ et :

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = a \times i \times j.$$

1. Déterminer la valeur de la constante a.
2. Donner la loi et l'espérance de X.
3. Déterminer la loi de Y.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $P(X = Y)$.

Exercice 7.2 (★)
Soit λ et μ deux réels strictement positifs.
Soit U, V et W trois variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que U et W suivent la loi de Poisson de paramètre λ et V suit la loi de Poisson de paramètre μ.
On pose $X = U + V$ et $Y = V + W$.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Montrer que $\mathrm{Cov}(X, Y)$ existe et la calculer.
3. En déduire le cœfficient de corrélation linéaire de X et Y.

Exercice 7.3 (★★)
Soit $m \geq 2$, une urne contient 2 boules blanches et $m - 2$ boules noires. On les tire une à une sans remise. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche et Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la seconde boule blanche.

1. Donner les ensembles images $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
2. Soient $(k, \ell) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
   Justifier que si $k \geq \ell$, $P([X = k] \cap [Y = \ell]) = 0$ et si $k < \ell$, $P([X = k] \cap [Y = \ell]) = \dfrac{2}{m(m-1)}$.
3. Soit $k \in X(\Omega)$. Montrer que $P(X = k) = \dfrac{2(m-k)}{m(m-1)}$.
4. On pose $D = Y - X$. Montrer que D a la même loi que X.
5. Les variables aléatoires X et D sont elles indépendantes ?
6. Montrer que $E(Y) = 2E(X)$ et que $\mathrm{Cov}(X, Y) = \dfrac{V(Y)}{2}$.
7. On pose $Z = m + 1 - Y$. Montrer que X et Z ont la même loi.
   En déduire $E(X)$ et $E(Y)$.

Exercice 7.4 (★★)

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant la même loi géométrique de paramètre p. On pose $q = 1 - p$, $U = X_1 + X_2$, $T = X_1 - X_2$.

1. Déterminer la loi de U.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   (a) Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $[U = n]$.
   (b) Calculer l'espérance conditionnelle $E(X_1 \mid [U = n])$. Retrouver la valeur de $E(X_1)$.
3. Déterminer la loi de T.
4. Calculer $\text{Cov}(U, T)$. Les variables U et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.5 (★★)

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Une urne contient des boules rouges et des boules blanches en proportions respectives r et b avec $0 < r < 1$ et $b = 1 - r$.
Un joueur effectue n tirages successifs d'une boule de cette urne, avec remise après chaque tirage.
Pour $k \geq 2$, le joueur gagne un point au k-ième tirage si la couleur de la boule obtenue à ce tirage n'est pas celle obtenue au tirage précédent. Sinon son gain à ce rang est nul.
Soit G la variable aléatoire égale au nombre total de points gagnés par le joueur au bout des n tirages.

1. Pour $k \in \{2, \dots, n\}$, on définit la variable X_k égale au gain du joueur pour le tirage de rang k. Préciser la loi de X_k et calculer $\text{Cov}(X_k, X_{k+1})$ pour $k \in \{2, \dots, n-1\}$.
2. Calculer l'espérance et la variance de G.

Exercice 7.6 (★★)

Soient $(p, q) \in]0, 1[^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient T, T' et U trois variables aléatoires mutuellement indépendantes.
On suppose que T suit la loi géométrique de paramètre p, T' suit la loi géométrique de paramètre q et U suit la loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$.
On pose $X = T + U$ et $X' = T' + (n - U)$.

1. Déterminer, en justifiant leur existence, l'espérance et la variance de X et X'.
2. Déterminer la covariance de X et X'.
3. Les variables aléatoires X et X' peuvent-elles être indépendantes ?
4. Déterminer le cœfficient de corrélation linéaire de U et X.

Exercice 7.7 (★★)

Soit λ un réel strictement positif. Soit $p \in]0, 1[$.
Le nombre N d'enfants d'une famille d'une population suit la loi de Poisson de paramètre λ. Chaque enfant présente à la naissance la probabilité p d'avoir un caractère génétique bien défini et ceci, indépendamment des autres enfants. Soit X le nombre d'enfants d'une famille présentant ce caractère et Y le nombre d'enfants ne le présentant pas.

1. Quelle relation existe-t-il entre N, X et Y ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de X sachant $[N = n]$.
   En déduire la loi de X.

3. Déterminer la loi de Y.

4. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exercice 7.8 (★★)

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher : une noire, une blanche et une verte. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise. On définit les trois variables aléatoires suivantes :

- X représente le numéro du tirage auquel une boule verte sort pour la première fois ;
- Y représente le nombre de boules blanches obtenues avant l'obtention de la première boule verte ;
- Z représente le nombre de boules noires obtenues avant l'obtention de la première boule verte.

1. Déterminer une relation reliant X, Y et Z.

2. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
   Donner son espérance et sa variance.

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de Y sachant $[X = k]$.
   (b) En déduire la loi du couple (X, Y).

4. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |x| < 1$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}$.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.
   (b) Montrer que $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
   En déduire l'espérance et la variance de Y.

5. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.
   Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

6. Déterminer la loi du couple (Y, Z).

Exercice 7.9 (★★★)

On considère trois boîtes et une infinité de jetons. On place successivement chacun des jetons, au hasard dans l'une des trois boîtes. On suppose que chaque boîte est vide au départ et de capacité illimitée. On suppose également qu'à chaque fois qu'un jeton est placé, il l'est de façon équiprobable dans chaque boîte.
Soit Y (resp. Z) le nombre de jetons placés lorsque, pour la première fois, deux boîtes exactement (resp. trois boîtes exactement) sont occupées par au moins un jeton.

1. Déterminer la loi de Y.

2. Déterminer la loi de Z sachant $[Y = k]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3. En déduire la loi de Z et la loi du couple (Y, Z).

Exercice 7.10 (★★★ - Oral ESCP 2016)

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soient λ et p deux réels tels que $\lambda > 0$ et $0 < p < 1$.
On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi définie par :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X=n, Y=k) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^2$.
2. Déterminer la loi marginale de la variable aléatoire X, puis celle de la variable aléatoire Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi conditionnelle de la variable aléatoire Y, sachant que $[X = n]$ est réalisé.
4. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X - Y$. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.
5. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.11 (★★★ - Oral ESCP 2021)

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On considère une urne qui contient trois boules : une blanche, une noire et une rouge.
On effectue des tirages au hasard d'une boule avec remise dans cette urne.
On note X le numéro du tirage où pour la première fois on a obtenu une boule blanche, et Y le numéro du tirage où pour la première fois on a obtenu une boule noire.
On note également $U = |X - Y|$ et $W = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de W, son espérance et sa variance.
3. À partir de cette question et jusqu'à la question 5, *on admet* que pour $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de U sachant $[W = k]$ est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.
   Que peut-on en déduire sur la loi de U et sur le couple (U, W) ?
4. Que représente la variable aléatoire $U + W$? En déduire une relation linéaire entre U, W, X et Y.
5. En déduire la valeur de la covariance de X et de Y.
   Expliquer de manière probabiliste le signe de la valeur obtenue.
6. Justifier l'affirmation de la question 3, à savoir que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de U sachant $[W = k]$ est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.
   On cherchera au préalable la loi du couple (X, Y).

---

8 Intégrales généralisées

Exercice 8.1 (★)
On considère l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que cette intégrale converge.
2. À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, déterminer la valeur de cette intégrale.

Exercice 8.2 (★)
On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^4}\mathrm{d}u$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u$.

1. Étudier la nature de ces deux intégrales.
2. À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, montrer que $I = J$.
3. À l'aide du changement de variable $x = u - \dfrac{1}{u}$, déterminer la valeur de l'intégrale $I + J$.
4. En déduire la valeur de I et de J.

Exercice 8.3 (★★)
À l'aide du changement de variable $u = t^2$ puis d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 8.4 (★★)
1. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.
2. À l'aide du changement de variable $u = t^2$ puis d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$ converge.
3. Montrer que la fonction $f : t \mapsto \sin(t^2)$ n'a pas de limite en $+\infty$ (construire deux suites qui tendent vers $+\infty$ dont les images par f n'ont pas la même limite).

Exercice 8.5 (★★)
On note, sous réserve d'existence :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}, \quad J_n = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}, \quad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}.$$

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, l'existence de I_n, J_n, K_n.
   Quelle relation y a-t-il entre I_n, J_n, K_n ?
2. On note $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n - J = 0$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a : $\quad 0 \leq K_n \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$.
4. Conclure sur la limite de I_n.

Exercice 8.6 (★★)
On s'intéresse aux intégrales de Bertrand : $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} \mathrm{d}x.$

1. *Cas où $\alpha = 1$*
   (a) À l'aide de primitives, déterminer la nature des intégrales suivantes :
   $$\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x (\ln x)^2}, \qquad \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \sqrt{\ln x}}, \qquad \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}.$$
   (b) Si $\alpha = 1$, à quelle condition sur $\beta \in \mathbb{R}$ l'intégrale de Bertrand est-elle convergente ?
2. *Cas où $\alpha > 1$*
   (a) Donner la nature des intégrales suivantes : $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 \ln x}, \qquad \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 (\ln x)^{-1}}.$
   (b) Soit $\alpha > 1$ quelconque. À quelle condition sur $\beta \in \mathbb{R}$ l'intégrale de Bertrand correspondante est-elle convergente ?
3. *Cas où $\alpha < 1$*
   (a) Donner la nature des intégrales suivantes : $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x} (\ln x)^3}, \qquad \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x} (\ln x)^{-2}}.$
   (b) Soit $\alpha < 1$ quelconque. À quelle condition sur $\beta \in \mathbb{R}$ l'intégrale de Bertrand correspondante est-elle convergente ?

Exercice 8.7 (★★)
Soit f la fonction définie par $\displaystyle f(x) = \int_1^{+\infty} e^{-xt} \frac{\cos t}{t} \,\mathrm{d}t.$

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, l'intégrale définissant $f(x)$ converge. Ainsi, f est une fonction définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que f est bien définie en 0.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2} \,\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2} \,\mathrm{d}t \leq 1.$
   (b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} \mathrm{d}t = 0.$
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

Exercice 8.8 (★★)
Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, sous réserve de convergence, $\displaystyle F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1 + t^3} \,\mathrm{d}t.$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale définissant $F(x)$ converge. Ainsi, F est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est paire.
3. Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa limite en $+\infty$. En déduire le tableau de variation de F (on ne demande pas la valeur de $F(0)$).
4. (a) Montrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a : $\quad |e^{-a} - e^{-b}| \leq |a - b|.$
   (b) En déduire que pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\quad |F(x) - F(y)| \leq |x^2 - y^2|.$
   (c) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.9 (★★)
On considère l'application $f : x \mapsto \int_0^1 (1-t^2)^x \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale $f(x)$ converge si, et seulement si, $x > -1$.
   Ainsi, f est une fonction définie sur $I =]-1, +\infty[$. On admet que f est continue sur I.
2. Montrer que f est décroissante sur I.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall x \in I, \quad (2x+3)f(x+1) = (2x+2)f(x)$.
4. En déduire que $f(x) \underset{x \to -1^+}{\sim} \dfrac{1}{2x+2}$.

Exercice 8.10 (★★)

1. Justifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ converge.

   Soit f la fonction définie par : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.
2. (a) Justifier qu'on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

   (b) À l'aide du changement de variable $u = t^2$ puis d'une intégration par parties, montrer que :
   $$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{4} \int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u.$$
   (c) Montrer que pour tout $x > 0$: $\displaystyle \int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u \leq \frac{e^{-x^2}}{x^3}$.

   (d) Montrer que : $\displaystyle \forall x > 0, \quad \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{x^3} \leq f(x) \leq \frac{e^{-x^2}}{2x}$.
   En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Étudier les variations de f.
4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 8.11 (★★)

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^x} \, \mathrm{d}t$ converge.

   On considère alors la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $\displaystyle f(x) = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^x} \, \mathrm{d}t$.
2. Montrer que pour tout $x > 1$, on a $\displaystyle |f(x)| \leq \frac{1}{x-1} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{x-1}$.
3. À l'aide d'intégrations par parties, établir que pour tout $x > 0$:
   $$f(x) = x\left(\frac{2}{\pi}\right)^{x+1} - x(x+1)f(x+2).$$
4. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ (on pourra distinguer les cas $x \in [2, +\infty[$ et $x \in]0, 2[$).
5. Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 8.12 (★★)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-t}}{\sqrt{n^4+t^4}}\mathrm{d}t$ converge.

   On pose alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-t}}{\sqrt{n^4+t^4}}\mathrm{d}t$.

2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Montrer la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. À l'aide d'un encadrement, déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 8.13 (★★)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \sqrt{2\pi}$.

3. Montrer que f est croissante sur $[-1, 1]$.

4. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|f(x)| \leq \dfrac{\pi^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}}|x|$.

   En déduire que f est continue en 0.

---

9 Valeurs propres, vecteurs propres

Exercice 9.1 (★)

Soit a, b et c trois réels non nuls. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(M) = 1$ et calculer $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

2. En déduire les éléments propres de la matrice M.

Exercice 9.2 (★)

Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de M.

2. En déduire les éléments propres de M.

Exercice 9.3 (★)

On considère l'application $f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} a+d & b+c \\ b+c & a+d \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $f^2 = f$.

3. Déterminer les valeurs propres de f, ainsi qu'une base de chacun de ses sous-espaces propres.

4. Déterminer une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de f. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 9.4 (★★)
Soient les matrices $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P = X^3 - X$ est un polynôme annulateur de F.
   En déduire les éléments propres de F.

2. Déterminer le rang de $G - I_3$ et calculer $G \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   En déduire les éléments propres de G.

3. (a) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres communs à F et G.

   (b) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathscr{B}$, ainsi que les matrices $P^{-1}FP$ et $P^{-1}GP$.

4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note H_a la matrice $H_a = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a \\ -2 & 3-a & 4-a \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que pour tout réel a, on a $H_a = aF + (1-a)G$.

   (b) Calculer $(H_a)^n$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9.5 (★★)
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Soit L un élément non nul de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et C un élément non nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
On pose $A = CL$ et $a = LC$.

1. Calculer A^2 en fonction de a et A. Que peut-on en déduire pour le spectre de A ?

2. Montrer que A est de rang 1 (on pourra expliciter A à partir des cœfficients de C et L).

3. Calculer AC et en déduire que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, a\}$.

4. On suppose $a \neq 0$. Montrer que les sous-espaces propres E_0 et E_a sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exercice 9.6 (★★)
Soit a, b, c trois réels. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On introduit $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \ / MA = AM\}$.

1. Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. *On suppose dans cette question que $ac > 0$.*
   Déterminer les éléments propres de A.

3. *On suppose dans cette question que $a\,c > 0$ et $b^2 \neq a\,c$.*

   (a) Montrer qu'on a $E_b(A) \oplus E_{-\sqrt{ac}}(A) \oplus E_{\sqrt{ac}}(A) = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   (b) Soit M un élément de $\mathscr{C}(A)$.
   Soit λ une valeur propre de A, X un vecteur propre associé.
   Montrer que $MX \in E_\lambda(A)$ et en déduire qu'il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $MX = \alpha\,X$.

   (c) En utilisant la question 3.(a), montrer que M est semblable à une matrice diagonale.

   (d) En déduire la dimension de $\mathscr{C}(A)$.

Exercice 9.7 (★★★)

Soit u l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer les endomorphismes v de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $v^2 = u$.

1. (a) Déterminer le rang de $(M - 4I_3)$ et calculer $M\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$. En déduire les valeurs propres de u.

   (b) Déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de u. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

2. Soit v un endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $v^2 = u$.

   (a) Montrer que $v \circ u = u \circ v$.

   (b) En déduire que les sous-espaces propres de u sont stables par v.

   (c) Montrer que la matrice N de v dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale.

   (d) En déduire les quatre seules matrices possibles pour N.

3. Montrer qu'il existe exactement quatre endomorphismes v de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $v^2 = u$ et déterminer leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9.8 (★★★)

Dans tout l'exercice, (A, B) désigne un couple de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$AB - BA = A \quad \text{et} \quad A \text{ non-nulle.} \qquad (*)$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^kB - BA^k = kA^k$.

2. En considérant les valeurs propres de l'endomorphisme φ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

   $$\varphi : M \mapsto MB - BM,$$

   montrer qu'il existe un entier $p \geq 2$ tel que $A^p = 0$.

3. Montrer que $p \leq n$.

4. On étudie à présent le cas $n = 2$.
   (a) Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que :
   $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T.$$
   (b) Montrer que $(*)$ se réécrit alors :
   $$TC - CT = T$$
   où $C = P^{-1}BP$.
   (c) Déterminer l'ensemble des solutions de $(*)$ dans le cas $n = 2$.

Exercice 9.9 (★★★ - QSP ESCP 2007)
Soit φ une forme linéaire non nulle d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit u un vecteur non nul de E. On définit un endomorphisme de E par $f(x) = x + \varphi(x) \cdot u$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Exercice 9.10 (★★★ - D'après oral ESCP 2012)
Soient $f, g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$ et que f admet n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g.
2. Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.
3. Montrer qu'il existe une base de E formée à la fois de vecteurs propres de f et de vecteurs propres de g. Que dire des matrices de f et g dans une telle base ?
4. Soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Déterminer le nombre de matrices $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$ (i.e. le nombre de « racines carrées » de A).

---

10 Variables aléatoires continues

Exercice 10.1 (★★)
On définit le réel $a = \dfrac{\ln\left(\frac{9}{5}\right)}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)}$ et on définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{9}\ln\left(\dfrac{9}{4}\right)\left(\dfrac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a, +\infty[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X admettant f pour densité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. (a) On pose $Y = X - a$. Montrer que Y suit une loi usuelle que l'on déterminera.
   (b) En déduire que X admet une espérance et une variance que l'on déterminera.
4. On pose $Z = e^X$.
   (a) Montrer que Z n'admet pas d'espérance.
   (b) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.

Exercice 10.2 (★★)
Soit $a > 0$ et soit $f_a : t \mapsto \begin{cases} at^{-a-1} & \text{si } t \in [1, +\infty[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Montrer que f_a est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire admettant f_a pour densité.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
   (b) X possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer. Même question pour la variance.
   (c) On pose $Y = \ln(X)$. Déterminer la fonction de répartition de Y, puis reconnaître la loi de Y.

Exercice 10.3 (★★)
Soit α et a des réels strictement positifs et x_0 et λ des réels.
On considère la fonction f définie par $f(x) = \mathbb{1}_{]x_0+a,+\infty[}\lambda\left(\dfrac{a}{x-x_0}\right)^{\alpha+1}$.

1. (a) Déterminer λ pour que f soit la densité d'une variable aléatoire X.
   On dit alors que X *suit la loi de Pareto de paramètres α, a et x_0*.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de X.
   (c) Étudier l'existence et la valeur éventuelle de $E(X)$.
   (d) Étudier l'existence et la valeur éventuelle de $V(X)$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Pareto de paramètres α, a et x_0. Soit $s \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.
   Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = rX + s$.
3. (a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. Soit $\beta > 0$ et $\gamma > 1$.
   Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \beta\gamma^X$.
   (b) Soit Z une variable aléatoire suivant la loi de Pareto de paramètres α, a et 0. Soit $c > 0$.
   Déterminer la loi de la variable aléatoire Z^c.

Exercice 10.4 (★★)
Soit $a \geq 0$ et $b > 0$. On considère la fonction $f_{a,b}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_{a,b}(x) = \dfrac{1}{b}\exp\left(-\dfrac{x-a}{b}\right) & \text{si } x \geq a \\ f_{a,b}(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que $f_{a,b}$ est bien une densité de variable aléatoire.

   On note $\mathscr{E}(a,b)$ la loi associée.
   On considère désormais une variable aléatoire X de loi $\mathscr{E}(a,b)$.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. On pose $Y = X - a$.
   (a) Déterminer la loi de Y et la reconnaître.
   (b) En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

4. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$.
   Montrer que la variable aléatoire $-b\ln(1-U)+a$ suit une loi $\mathscr{E}(a,b)$.

Exercice 10.5 (★★)
On considère la fonction $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t<0, \\ 2te^{-t^2} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire à densité T qui admet f pour densité.
2. Déterminer la fonction de répartition de T.
3. Déterminer le réel μ, appelé médiane de T, tel que $P(T \leq \mu) = \dfrac{1}{2}$.
4. Montrer que T admet une espérance et une variance et les déterminer.
5. On pose $Y = -2T$. Justifier que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y.
6. On pose $Z = T^2$. Montrer que Z suit une loi usuelle que l'on déterminera.

On s'intéresse à un appareil et plus particulièrement à la durée pendant laquelle il va fonctionner à partir de sa mise en service avant de tomber en panne. Cette durée, exprimée en heures, est modélisée par la variable aléatoire réelle T étudiée plus haut.
Si l'appareil fonctionne toujours au bout de x heures, on note $\Pi_x(h)$ la probabilité qu'il tombe en panne dans les h heures qui suivent.
On appelle taux de panne à l'instant x et on note $\pi(x)$ le nombre dérivé $\Pi_x'(0)$ s'il existe.

6. Exprimer $\Pi_x(h)$ à l'aide d'une probabilité conditionnelle, puis de la fonction de répartition de T.
7. Calculer le taux de panne en tout instant et tracer sa courbe représentative.

Exercice 10.6 (★★)
Soit X une variable aléatoire de densité f paire et continue sur $\mathbb{R}$.
On pose $Y = X^2$ et on suppose que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.
Déterminer f.

Exercice 10.7 (★★)
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On suppose que X suit la loi uniforme sur $[-1, \frac{3}{2}]$.

1. Montrer que $|X|$ est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de $|X|$.
2. Par deux méthodes, montrer que $|X|$ admet une espérance et la déterminer.

Exercice 10.8 (★★)
Soit X une variable aléatoire de densité f continue et telle que $E(X^2)$ existe.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto tP(|X| \geq t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si x est un réel strictement positif, on a :

$$0 \leq x^2 P(|X| \geq x) \leq \int_{-\infty}^{-x} t^2 f(t)\mathrm{d}t + \int_{x}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t.$$

   En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 P(|X| \geq x) = 0$.

3. Soit x un réel positif. Montrer que :

$$\int_0^x tP(|X| \geq t)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}P(|X| \geq x) + \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} t^2 f(t)\mathrm{d}t.$$

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} tP(|X| \geq t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{E(X^2)}{2}$.

Exercice 10.9 (★★★)

Soit Z une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On pose $X = e^Z$.

1. On suppose que Z suit la loi normale centrée réduite.
On dit alors que X *suit la loi log-normale de paramètres* 0 *et* 1.
   (a) Montrer que X est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de X.
   (b) Soit $\alpha > 0$. Montrer que X^α admet une espérance et déterminer $E(X^\alpha)$.
   (c) En déduire que X admet une espérance et une variance et les déterminer.
2. On suppose maintenant que Z suit la loi normale de paramètres m et σ^2 (où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$).
On dit alors que X *suit la loi log-normale de paramètres* m *et* σ^2.
   (a) Montrer que la variable aléatoire $X^* = (e^{-m}X)^{\frac{1}{\sigma}}$ suit la loi log-normale de paramètres 0 et 1.
   (b) Montrer que X admet une espérance et une variance et les déterminer.

Exercice 10.10 (★★★ - QSP ESCP 2018)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0, n[$. On note Y la partie entière de X, et $Z = X - Y$.
Déterminer la loi de Y, puis celle de Z.

Exercice 10.11 (★★★ - QSP HEC 2013)

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant la loi normale d'espérance m et de variance égale à 1. Soit b un réel strictement positif fixé.

1. Montrer que l'application $a \mapsto P(a < X < a + b)$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admet un maximum atteint en un point a_0 que l'on déterminera.
2. Exprimer la valeur de ce maximum à l'aide de la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.
3. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 10.12 (★★★ - QSP ESCP 2012)

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\ln(2)}\frac{1}{1+x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire admettant X pour densité. Montrer que $Y = \frac{1}{X} - \lfloor \frac{1}{X} \rfloor$ a même loi que X.

---

11 Produit scalaire, espace euclidien

Exercice 11.1 (★)

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$, on considère l'application f qui, à tous vecteurs P et Q de $\mathbb{R}_n[x]$, associe :

$$f(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k).$$

1. Montrer que f définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$ et déterminer la norme euclidienne associée.
2. Déterminer $\langle x^p, x^q \rangle$ pour tout couple $(p, q) \in ([\![0, 1, 2]\!])^2$.

Exercice 11.2 (★)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Pour tout couple (X, Y) de vecteurs-colonnes de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(X, Y) = {}^tXAY$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On note désormais : $\langle X, Y \rangle = \varphi(X, Y)$.
2. On note $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Déterminer $\langle E_p, E_q \rangle$ pour tout couple $(p, q) \in \{1, 2, 3\}^2$.

Exercice 11.3 (★)

Pour des matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on définit $\langle A, B \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. On note $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer que la famille (X, Y, Z, T) est orthogonale. En déduire une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Exprimer les coordonnées de A dans la base $\mathscr{B}$.
4. Montrer que la base canonique $\mathscr{C} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
5. Déterminer la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$.

Exercice 11.4 (★)

On considère, pour tous polynômes P, Q à cœfficients réels :

$$\Phi(P, Q) = (PQ)(0) + \int_{-1}^{1} P'(t)\, Q'(t)\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.
   On note désormais $\langle P, Q \rangle = \Phi(P, Q)$.
2. Déterminer $\langle x^p, x^q \rangle$ pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

3. Montrer que la famille $(1, x, x^2, x^3 - x)$ est une famille orthogonale.
4. En déduire une famille orthonormée de $\mathbb{R}_3[x]$ qui est également une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

Exercice 11.5 (★★)

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $c_k : t \mapsto \cos(kt)$ et $s_k : t \mapsto \sin(kt)$.

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur E en posant :

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ et $t \in [-\pi, \pi]$.
   Écrire $\cos(mt)\cos(nt)$ et $\sin(mt)\sin(nt)$ comme une somme de deux cosinus.
3. (a) Déterminer la norme de c_k et de s_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $(c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, \dots, c_n, s_n)$ est orthogonale.
   (c) En déduire une famille orthonormale de E.

Exercice 11.6 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On définit pour tout $(M, N) \in E^2$:

$$\Phi(M, N) = \mathrm{Tr}({}^tM \times N).$$

1. (a) Si $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$, exprimer $\Phi(M, N)$ en fonction des cœfficients $m_{i,j}$ et $n_{i,j}$.
   (b) Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note désormais : $\langle M, N\rangle = \Phi(M, N)$.
   (c) Pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice dans tous les cœfficients valent 0 sauf celui sur la i-ème ligne et la j-ème colonne qui vaut 1.
   Déterminer pour tout $(i, j, k, l) \in \{1, \dots, n\}^4$, $\langle E_{i,j}, E_{k,l}\rangle$.
2. Soit $\mathscr{S}_n$ (resp. $\mathscr{A}_n$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) d'ordre n.
   (a) Montrer que $\mathscr{S}_n \perp \mathscr{A}_n$.
   (b) Déterminer une base de $\mathscr{S}_n$ et une base de $\mathscr{A}_n$.
   (c) Montrer que ces familles sont orthogonales.
   En déduire une base orthonormée de $\mathscr{S}_n$ et une base orthonormée de $\mathscr{A}_n$.
   (d) Montrer que $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ sont supplémentaires dans E.
   (e) En déduire une base orthonormée de E.

Exercice 11.7 (★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit sclaire que l'on note $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et F un sous-espace vectoriel de E.
On pose :

$$G = \{x \in E\ ;\ \forall y \in F, \langle x, y\rangle = 0\}.$$

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.

2. Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.

3. On considère $e_1, \dots, e_p$ une base de F et u l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall x \in E, \quad u(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

   (a) Montrer que G est le noyau de u.

   (b) Montrer que l'image de u est incluse dans F.

4. En déduire que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 11.8 (★★★)

Soit P une matrice carrée d'ordre n. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) P est une matrice orthogonale ;

(ii) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PX\| = \|X\|$;

(iii) $\forall (X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ \langle PX, PY \rangle = \langle X, Y \rangle$.

Exercice 11.9 (★★★)

1. Déterminer l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des entiers relatifs. Quel est son cardinal ?

2. Mêmes questions pour les matrices orthogonales dont les coefficients sont tous positifs ou nuls.

Exercice 11.10 (★★★)

1. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t$ converge.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[x]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t$.
   Montrer que cette application définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

3. On définit la suite de polynômes $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = x \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ T_{k+2} = 2xT_{k+1} - T_k.$$

   Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $T_k(\cos(x)) = \cos(kx)$.

4. Montrer que la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$.
   On pourra poser $t = \cos(x)$.

5. Calculer $\|T_k\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 11.11 (★★★★)

On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[x]$, et on pose pour tout $(P, Q) \in E^2$:

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\, \mathrm{d}t.$$

Pour tout $0 \leq p \leq n$, on pose $Q_p(x) = x^p(x-1)^p$ et $L_p = Q_p^{(p)}$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

2. Montrer que L_p est un polynôme dont on précisera le degré et le coefficient dominant.

3. Calculer par intégration par parties $\langle L_p, L_q \rangle$ pour $p \neq q$. En déduire que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Montrer que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, L_p est orthogonal à $\mathbb{R}_{p-1}[x]$.

5. Déterminer enfin la norme euclidienne de L_p.

---

12 Couples de variables à densité

Exercice 12.1 (★)

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé, suivant respectivement des lois $\mathscr{E}(a)$ et $\mathscr{E}(b)$ avec $a, b > 0$.

Déterminer la loi de $Z = X + Y$. *On distinguera pour cela les cas $a = b$ et $a \neq b$.*

Exercice 12.2 (★★)

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2} e^{-|x|}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. On pose $Z = |X|$. Montrer que Z suit une loi usuelle que l'on déterminera.

4. Soit X et Y deux variables indépendantes ayant f pour densité.
Déterminer la loi de la variable $S = X + Y$.

Exercice 12.3 (★★)

Soit $\lambda > 0$, et soit $f : x \mapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$. Montrer que $Z = X - Y$ admet f pour densité. En déduire la loi de $|Z|$.

3. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes admettant f pour densité. Déterminer une densité de $X_1 + X_2$.

Exercice 12.4 (★★)

Soit Z et T deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé indépendantes, suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Déterminer la fonction de répartition et une densité de la variable $-T$.

2. Déterminer la fonction de répartition et une densité de la variable Z^2.

3. Donner une densité et la fonction de répartition de la variable $Z^2 - T$.

Exercice 12.5 (★★)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite.

1. Déterminer la loi de $T = X^2$.

2. Justifier la convergence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-t^2}}$ à l'aide du changement de variable $t = \frac{1+\sin(u)}{2}$.

3. Déterminer la loi de $Z = X^2 + Y^2$.

Exercice 12.6 (★★)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite.

1. Donner une densité de la variable $T = \ln(|X|)$.

2. Donner une densité de la variable $U = -\ln(|X|)$.

3. En déduire une densité de $Z = \ln(|X|) - \ln(|Y|)$ (on procèdera au changement de variable $u = e^{2t}$).

4. Donner une densité de $\left|\frac{X}{Y}\right|$.

Exercice 12.7 (★★)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Donner une densité de $T = \max(X,Y)$.

2. Donner une densité de $U = \min(X,Y)$.

3. Les variables T et U sont-elles indépendantes ?

4. Donner une densité de $V = X - Y$.

5. Donner une densité de $W = T - U$.

6. Deux personnes se donnent rendez-vous entre 12h et 13h. Estimer le temps d'attente de la première personne arrivée.

Exercice 12.8 (★★)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.

1. On pose $Y = \min(X, 1-X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de Y, puis donner une densité de Y. Reconnaître la loi de Y et en déduire son espérance et sa variance.

2. Mêmes questions pour $Z = \max(X, 1-X)$.

3. On pose $R = \frac{Y}{Z}$. Montrer que la fonction $f_R : x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de R. Calculer $E(R+1)$ et $V(R+1)$, puis en déduire $E(R)$ et $V(R)$.

Exercice 12.9 (★★★ - Ecricome 2001)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telles que $X \hookrightarrow \mathscr{E}(a)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(b)$, où a et b sont deux réels strictement positifs.

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire $-X$.

2. Montrer que $Y - X$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = \begin{cases} \dfrac{ab}{a+b}e^{-bt} & \text{si } t > 0, \\ \dfrac{ab}{a+b}e^{at} & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

3. On considère la variable aléatoire $Z = |X - Y|$.

   (a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a :

$$P(Z \leq x) = 1 - \frac{be^{-ax} + ae^{-bx}}{a+b}.$$

   (b) Montrer que Z est une variable à densité, et en déterminer une densité.

   (c) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

Exercice 12.10 (★★★ - QSP HEC 2013)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $P(X = Y)$ et $P(XY > 0)$.

2. Trouver la probabilité que la matrice M soit diagonalisable.

Exercice 12.11 (★★★ - Oral ESCP 2008)

On suppose que toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. La lettre a désigne un réel strictement positif donné.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (a+1)x^a & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (a) Vérifier que f est une densité de probabilité.

   (b) Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité. Calculer $E(X)$.

2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi que X. On pose $Z = \dfrac{X_1}{X_2}$.

   (a) Donner une densité des variables aléatoires Y_1 et Y_2 définies par $Y_1 = \ln(X_1)$ et $Y_2 = -\ln(X_2)$.

   (b) En déduire une densité de la variable $T = \ln(Z)$.

   (c) Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{a+1}{2}x^a & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{a+1}{2}x^{-(a+2)} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

   Montrer que h est une densité de Z.

Exercice 12.12 (★★★ - Oral HEC 2007)
Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur [0,1], définies sur un espace de probabilité noté $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Quelle est la loi de $-\ln(U)$.

   Montrer que la densité de la variable aléatoire $Z = -\ln(U) - \ln(V)$ est donnée par

$$f_Z(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit a un réel supérieur ou égal à 1 . On définit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -aU \\ aV & 3 \end{pmatrix}$$

2. (a) Montrer que la probabilité p que la matrice M ait toutes ses valeurs propres réelles vaut

$$p = \frac{1 + 2\ln(a)}{a^2}.$$

   (b) Montrer que la probabilité que M soit diagonalisable dans $\mathbf{R}$ vaut également p.

3. Dans cette question, on prend $a = 1$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $X(\omega)$ la plus grande valeur propre de $M(\omega)$.

   Déterminer une densité de X.

Exercice 12.13 (★★★ - Oral ESCP 2008)
Un joueur prend pour cible un mur muni d'un repère orthonormé (O, i, j). On note X et Y les variables aléatoires désignant respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point d'impact du tir sur le mur, et on suppose que X et Y sont indépendantes, de même loi normale centrée réduite. On note Φ la fonction de répartition de X.

1. (a) Donner une densité de $|X|$.

   (b) Montrer que la variable aléatoire $Z = |X| + |Y|$ admet comme densité la fonction h définie par

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} e^{-x^2/4} \displaystyle\int_{-x/2}^{x/2} e^{-v^2}\, \mathrm{d}v & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. (a) Déterminer la dérivée de la fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ par : $\varphi(x) = \displaystyle\int_{-x/2}^{x/2} e^{-v^2}\, \mathrm{d}v$.

   (b) Étudier les variations de φ et tracer l'allure de sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

3. On peint sur le mur un carré plein de sommets $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$.

   On note p la probabilité pour que l'impact soit dans le carré. Exprimer p à l'aide de la variable aléatoire Z, et déterminer p en fonction de Φ.

Exercice 12.14 (★★★★ - Oral HEC 2005)

1. Soient a, b, α trois réels strictement positifs vérifiant $0 < \alpha < a^2 \leqslant b^2$.

(a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\alpha \left(\frac{a}{\sqrt{t}}-1\right)\left(\frac{b}{\sqrt{\alpha-t}}-1\right)\mathrm{d}t$. Cette intégrale est notée $I_{a,b}(\alpha)$.

(b) Calculer $I_{a,b}(\alpha)$ à l'aide du changement de variable $t=\alpha\cos^2 u$.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on place deux points M et N tels que leurs abscisses respectives X_M et X_N suivent la loi uniforme sur $]0,a[$ et leurs ordonnées Y_M et Y_N suivent la loi uniforme sur $]0,b[$.
On suppose que les quatre variables aléatoires X_M, X_N, Y_M et Y_N sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$ et sont indépendantes.
On note D la variable aléatoire égale à la longueur du segment $[M,N]$: $D^2=(X_M-X_N)^2+(Y_M-Y_N)^2$.

2. (a) Quelle est la loi suivie par $-X_M$?
   (b) On pose : $Z_a=(X_N-X_M)$ et $Z_b=(Y_N-Y_M)$. Déterminer les lois de probabilité de Z_a et Z_b respectivement.
   (c) Montrer qu'une densité $f_{Z_a^2}$ de Z_a^2 est donnée par $f_{Z_a^2}(x)=\begin{cases}\frac{1}{a^2}\left(\frac{a}{\sqrt{x}}-1\right) & \text{si } 0<x<a^2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.
3. Soit $\theta<a$. Calculer $P(D\leq\theta)$.

---

13 Diagonalisation

Exercice 13.1 (★)
Soit la matrice $M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de M.
2. En déduire les éléments propres de M.
3. M est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

Exercice 13.2 (★)
On considère la matrice $G=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 4\\ 2 & -2 & -3\end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de $G-I_3$ et calculer $G\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.
2. En déduire les éléments propres de G.
3. La matrice G est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

Exercice 13.3 (★)
Soient a, b et c trois réels non nuls et M la matrice suivante :

$$M=\begin{pmatrix}1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c}\\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c}\\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1\end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer que $\mathrm{rg}(M) = 1$ et calculer $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
   (b) En déduire les éléments propres de M.
2. Calculer la matrice M^p où $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 13.4 (★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les cœfficients sont égaux à 1.

1. (a) Justifier que J est diagonalisable.
   (b) Déterminer un polynôme annulateur de J et diagonaliser J.
2. On pose $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \dots & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que A est diagonalisable.
   (b) En utilisant la diagonalisation de J, diagonaliser A.
   Préciser les valeurs propres de A.

Exercice 13.5 (★)

Déterminer tous les couples $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ pour lesquels la matrice élémentaire $E_{i,j}$ est diagonalisable.

Exercice 13.6 (★★)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. On cherche dans cet exercice à trouver toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^2 + M = A. \qquad (*)$$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
2. Soit M une solution de $(*)$.
   (a) Vérifier que $AM = MA$.
   (b) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Montrer que $MX \in E_\lambda(A)$, et en déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $MX = \mu X$. Donner une relation entre λ et μ.
3. Déterminer toutes les solutions de $(*)$, et donner l'unique solution dont toutes les valeurs propres sont positives.

Exercice 13.7 (★★)

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer les endomorphismes v de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v^2 = u$.

1. (a) Déterminer le rang de M et calculer $M\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$. En déduire les éléments propres de u.

   (b) Montrer que u est diagonalisable et déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.

2. Soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v^2 = u$.

   (a) Montrer que $v \circ u = u \circ v$. En déduire que les sous-espaces propres de u sont stables par v.

   (b) Montrer que la matrice N de v dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale.
   En déduire les quatre seules matrices possibles pour N.

3. Montrer qu'il existe exactement quatre endomorphismes v de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v^2 = u$ et déterminer leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13.8 (★★)
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Soit L un élément non nul de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et C un élément non nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
On pose $A = CL$ et $a = LC$.

1. Calculer A^2 en fonction de a et A. Que peut-on en déduire pour le spectre de A ?

2. Montrer que A est de rang 1 (on pourra expliciter A à partir des cœfficients de C et L).

3. Calculer AC et en déduire que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, a\}$.

4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que A soit diagonalisable.

Exercice 13.9 (★★)
Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On note tr l'application linéaire qui à toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$.

   (b) En déduire la dimension de $\ker(\mathrm{tr})$.

   (c) Établir que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\mathrm{tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I)$.

2. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe $f(M) = M + \mathrm{tr}(M)I$

   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Utiliser la première question pour déterminer les valeurs propres de f. En déduire que f est un automorphisme diagonalisable de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe $g(M) = M + \mathrm{tr}(M)J$, où J désigne une matrice non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.

   On admet que g est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Établir que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.

   (b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.

   (c) g est-il diagonalisable ?

Exercice 13.10 (★★)

Soient a, b, c trois réels et A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On introduit $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \,/ MA = AM\}$.

1. Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   On suppose dans cette question que $ac > 0$.

2. Déterminer les éléments propres de A.
   En déduire que A est diagonalisable.

   On suppose désormais que $a\,c > 0$ et $b^2 \neq a\,c$.

3. (a) Soit M un élément de $\mathscr{C}(A)$.
   Soit λ une valeur propre de A, X un vecteur propre associé.
   Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $MX = \alpha\, X$.
   (b) En déduire que M est diagonalisable.

4. (a) Déterminer la dimension de $\mathscr{C}(A)$.
   (b) Donner une base de $\mathscr{C}(A)$ lorsque $a = c$, et montrer que dans ce cas cet espace ne contient que des matrices symétriques.

Exercice 13.11 (★★★ - QSP HEC 2009)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.
Montrer que si $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ne sont pas supplémentaires, alors f n'est pas diagonalisable.

Exercice 13.12 (★★★ - QSP HEC 2017)

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application φ_A qui à toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe la matrice $\varphi_A(M) = AM$.

1. Comparer les spectres de A et φ_A.

2. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que φ_A est diagonalisable.

Exercice 13.13 (★★★ - QSP HEC 2015)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie $n \geq 2$. On considère des endomorphismes f, p et q de E, ainsi que des scalaires distincts λ et μ tels que pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, on a $f^k = \lambda^k p + \mu^k q$.

1. Montrer que $(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ (f - \mu \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2. En déduire que l'ensemble des valeurs propres de f est inclus dans $\{\lambda, \mu\}$ et que f est diagonalisable.

Exercice 13.14 (★★★★ - QSP HEC 2016)

Soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = M + 2\,{}^t M + 3\mathrm{Tr}(M) I_n$. f est-il diagonalisable ?

Exercice 13.15 (★★★★ - Oral ESCP 2016)
Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E diagonalisable. On note $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ l'ensemble de ses valeurs propres et $E_1, \ldots, E_p$ les sous-espaces propres associés.
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f, tel que $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$. Soit x un vecteur de F.

1. Montrer qu'il existe un unique p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_p$.
2. On suppose désormais $x \neq 0$. Montrer que, quitte à modifier l'ordre, on peut supposer qu'il existe $r \in [\![1, p]\!]$ tel que $x_i = 0$ pour $i > r$ et $x_i \neq 0$ pour $i \leqslant r$. On a alors $x = x_1 + \cdots + x_r$.

   On note V_x le sous-espace vectoriel engendré par $(x_1, \ldots, x_r)$.
3. (a) Montrer que $(x_1, \ldots, x_r)$ est une base de V_x.
   (b) Montrer que pour tout $j \geqslant 0, f^j(x) \in V_x$.
   (c) Déterminer la matrice A de la famille $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$ dans la base $(x_1, \ldots, x_r)$ de V_x.
   Notons $C_1, \ldots, C_r$ les colonnes de A et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des réels tels que $\sum_{j=1}^r \alpha_j C_j = 0$.
   Montrer que le polynôme $P = \sum_{j=1}^r \alpha_j X^{j-1}$ est le polynôme nul. En déduire que A est inversible.
   (d) Montrer que pour tout $i \in [\![1, p]\!], x_i \in F$, puis que $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$.
4. Soit g un endomorphisme de E, diagonalisable et commutant avec f(*i.e.* tel que $f \circ g = g \circ f$). Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à f et g.

---

14 Vecteurs aléatoires

Exercice 14.1 (★)
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi donnée par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(X_i = 1) = \frac{1}{3}, \quad P(X_i = 2) = \frac{2}{3}.$$

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$.

1. Déterminer la loi de $Y_i = X_i - 1$.
2. Quelle est la loi de $Y_1 + \cdots + Y_n$?
3. En déduire la loi de S_n.

Exercice 14.2 (★★)
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi normale centrée réduite.
On pose $Y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i^2$.

1. Montrer que la fonction de répartition de $Y = X_1^2$ est égale à $F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 & \text{sinon} \end{cases}$,

   où Φ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
2. En déduire que Y est une variable à densité et en déterminer une densité.
3. Déterminer une densité de $\frac{Y}{2}$, et reconnaître sa loi.

4. En déduire la loi de $\frac{Y_n}{2}$, puis une densité de Y_n.

Exercice 14.3 (★★)
Soit f le fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\alpha}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f soit une densité de probabilités. *Dans la suite, on considère que α prend cette valeur.*

2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition F_X de X. X admet-elle une espérance ?

Dans la suite, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, et $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, admettant toutes f pour densité. On pose alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $Y_k = \min(X_1, \ldots, X_k)$.

3. Déterminer la fonction de répartition de Y_2, et en déduire que Y_2 est une variable à densité, dont on donnera une densité f_2.

4. Montrer que pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \dfrac{\pi}{2}$.

5. En déduire un équivalent de f_2 en $+\infty$.

6. Montrer que Y_2 admet une espérance. En déduire que pour tout $k \geq 2$, Y_k admet une espérance.

Exercice 14.4 (★★)
Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires, toutes définies sur le même espace probabilisé, ayant toutes la même espérance m et la même variance σ^2.
On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $\text{Cov}(X_i,\, X_j) = r\,\sigma^2$ pour tout $i \neq j$.
On pose $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\,(X_1 + \cdots + X_n)$.

1. Écrire la matrice des variances-covariances de $(X_1, \ldots, X_n)$.

2. Prouver que $|r| \leq 1$.

3. Calculer $E(\overline{X})$ et $V(\overline{X})$. En déduire que nécessairement $-\dfrac{1}{n-1} \leq r \leq 1$.

4. Calculer $E\big((X_1 - \overline{X})^2\big)$ en fonction de n, r et σ^2.

Exercice 14.5 (★★★)
Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables mutuellement indépendantes et suivant chacune la loi exponentielle de paramètre λ. On pose $M = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que M est une variable à densité et déterminer une densité de M.

2. Montrer que $E(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \frac{(-1)^k}{\lambda(k+1)}$.

3. Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\dfrac{1}{k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^k \mathrm{d}t$ et en déduire que $E(M) = \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 14.6 (★★★)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$.

1. Déterminer la valeur de r pour laquelle $f_\lambda : x \to \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \lambda \\ \dfrac{r}{x^{k+1}} & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

   Si X admet pour densité f_λ, on dit que X suit la loi de Pareto de paramètre λ et k.

2. Déterminer la fonction de répartition d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètres λ et k.

3. En utilisant la méthode d'inversion, simuler une variable aléatoire suivant une loi de Pareto de paramètres λ et k.

4. Soient $X_1, \cdots, X_k$ k variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur [0,1]. On pose alors $Y = \dfrac{\lambda}{\max(X_1, \cdots, X_k)}$.
   (a) Montrer que Y suit une loi de Pareto de paramètres λ et k.
   (b) En déduire une autre méthode pour simuler la loi de Pareto.

Exercice 14.7 (★★★ - Oral ESCP 2018)

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre p, où p est un réel de $]0,1[$. On pose de plus $q = 1 - p$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

On considère également une variable aléatoire N, à valeur dans $\mathbb{N}^*$, possédant une espérance et indépendante des variables aléatoires X_n.

Pour tout ω de Ω, on pose $S(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$ et *on admet* que $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$ est une variable aléatoire.

Enfin, on rappelle la formule suivante, que l'on pourra utiliser sans la justifier. Pour tous entiers naturels r et s tels que $r \leq s$, on a :

$$\sum_{j=r}^{s} \binom{j}{r} = \binom{s+1}{r+1}$$

1. Déterminer $S_n(\Omega)$. Montrer que l'on a:
$$\forall\, k \in S_n(\Omega), \quad P([S_n = k]) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

2. (a) Vérifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de l'espérance conditionnelle $E(S \mid [N = n])$ et donner sa valeur.
   (b) En déduire $E(S)$.

3. On suppose dans cette question que N suit la loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi de S.

Exercice 14.8 (★★★ - QSP HEC 2021)

On considère un circuit électronique avec 3 composants C_1, C_2 et C_3.
Ce circuit ne fonctionne qui si C_1 fonctionne ainsi que C_2 ou C_3.
Sachant que les durées de vie de chaque composant, supposées mutuellement indépendantes, suivent une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, déterminer la loi de la durée de vie du circuit complet.
Proposer un programme `Python` permettant de vérifier le résultat obtenu.

Exercice 14.9 (★★★★)

Soit $k \geq 2$ et $p_1, \ldots, p_k$ des réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ ayant pour composantes $X_1, \ldots, X_k$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, k]\!], \quad P(X = e_i) = p_i,$$

où $(e_1, \ldots, e_k)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.

On note $C(X)$ la matrice carrée d'ordre k dont le coefficient à la ligne i et à la colonne j est $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ pour tout $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$.

1. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, montrer que X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p_i.
2. Quelle est la loi de $X_1 + X_2$?
3. Calculer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$
4. Écrire la matrice $C(X)$.
5. On pose $A = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M = A\,{}^tU$. On note I la matrice identité d'ordre k.
   (a) Vérifier que M et $I - M$ sont des matrices de projecteurs.
   (b) Montrer que $C(X)$ et $I - M$ ont le même rang.
   (c) Déterminer le rang de $C(X)$.

15 Projection orthogonale

Exercice 15.1 (★★)

On note $E = \mathscr{C}^1([-1, 1])$ et on pose pour tout f et g dans E :

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On définit les fonctions :

$$f_0 : x \mapsto x, \quad f_1 : x \mapsto \cos(2x), \quad f_2 : x \mapsto \sin(2x).$$

1. Justifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. On pose $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.
   (a) Calculer la projection orthogonale de f_0 sur F.
   (b) En déduire la distance de f_0 à F.

Exercice 15.2 (★)

Soit $E = \mathbb{R}_{2n}[x]$. On pose, pour tous $P, Q \in E$,

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=-n}^{n} P(k)Q(k).$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. Montrer que si P est pair et Q impair, alors P et Q sont orthogonaux.

3. Déterminer, en fonction de n, les valeurs de a et b qui rendent minimale l'expression $\|x^2 - ax - b\|^2$.

Exercice 15.3 (★★)

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on considère F le sous-espace vectoriel défini par :

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y - z = 0\}.$$

On détermine la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale p sur F par deux méthodes.

1. **Méthode 1.**
   (a) Déterminer une base orthonormale de F.
   (b) Déterminer $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(p)$.

2. **Méthode 2.**
   (a) Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$.
   (b) On note q la projection orthogonale sur $F^\perp$. Déterminer $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(q)$.
   (c) En déduire $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(p)$.

Exercice 15.4 (★★)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$, et soit (a, b) une famille orthonormée de E.
Soit $f : E \to E$ l'application définie par $f(x) = \langle x, a\rangle b + \langle x, b\rangle a$.

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

2. Soit $v \in \text{Vect}(a, b)^\perp$. Calculer $f(v)$. En déduire une valeur propre de f.

3. Calculer $f(a + b)$ et $f(a - b)$. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 15.5 (★★★)

En utilisant le théorème de minimisation de la norme, montrer l'existence et donner la valeur de :

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi (a\cos t + b\sin t - t)^2 \mathrm{d}t.$$

Exercice 15.6 (★★★ - QSP HEC 2018)

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
On note H le sous-espace vectoriel de E engendré par les trois polynômes $(X-1)(X-2)(X-4)$, $(X-1)(X-3)(X-4)$ et $(X-2)(X-3)(X-4)$.

1. (a) Justifier que H est un hyperplan de E.
   (b) Trouver une forme linéaire dont le noyau est égal à H. Est-elle unique ?

2. On considère le produit scalaire sur E défini par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \langle P, Q\rangle = P(1)Q(1) + P(2)Q(2) + P(3)Q(3) + P(4)Q(4).$$

   Calculer, pour tout polynôme $P \in E$, la projection orthogonale de P sur $H^\perp$.

Exercice 15.7 (★★★★ - Inspiré de QSP ESCP 2015 - Matrice de Gram)

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et $\mathscr{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E. Montrer que $\mathscr{F}$ est une base de E si, et seulement si la matrice G dont le terme d'indice (i, j) est $\langle e_i, e_j \rangle$ est inversible.

La matrice G ainsi définie est appelée matrice de Gram (le même Gram que celui de Gram-Schmidt) associée à la famille $\mathscr{F}$.

Exercice 15.8 (★★★★)

Soient E et F deux espaces vectoriels euclidiens de dimensions non nulles. Soit f une application linéaire de E dans F et b un élément de F.

1. Montrer que $\min\limits_{x \in E} \|b - f(x)\|$ existe.
2. Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des éléments de E qui réalisent ce minimum et a_0 un élément de $\mathscr{S}$.
   (a) Montrer que $\mathscr{S} = \{a_0 + u, u \in \operatorname{Ker} f\}$.
   (b) Montrer que $\mathscr{S}$ contient un élément de norme minimale et un seul que nous noterons a.
   (c) Montrer que a est caractérisé par $b - f(a) \in (\operatorname{Im} f)^{\perp}$ et $a \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.
3. (a) Montrer que l'application g de F dans E qui à tout élément b de F associe l'élément a obtenu à la question 2. est linéaire.
   On dit que g est *la pseudo-inverse* de f.
   (b) Montrer que $f \circ g$ est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} f$ et $g \circ f$ celle sur $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$. Que dire lorsque f est bijective ?

Exercice 15.9 (★★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$ du produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

On pose $L_k(t) = e^t \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \left(t^k e^{-t} \right)$ pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$.

1. (a) Justifier que L_k appartient à $\mathbb{R}_n[x]$ et déterminer son degré et son coefficient dominant.
   (b) Calculer $\langle L_k, x^p \rangle$ pour $p < k$, puis pour $p = k$.
   (c) En déduire que $(L_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$ et calculer $\|L_k\|$.
2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = \dfrac{L_k}{\|L_k\|}$.
   (a) Calculer $P_k(0)$.
   (b) On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_n[x],\ P(0) = 0\}$. Déterminer une base de $F^{\perp}$ que l'on exprimera dans la base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$.
   (c) En déduire la distance de 1 à $F^{\perp}$, ainsi que la distance de 1 à F.

Exercice 15.10 (★★★★ - Oral ESCP 2008)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = I_n - C\,{}^tC \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, où C est un vecteur colonne non nul. On confond $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.

On note $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel, et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et les vecteurs propres associés.
2. À quelle condition sur C l'application f est-elle un projecteur ? Préciser alors de quel projecteur il s'agit.
3. Dans cette question, $n = 4$ et $C = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On note H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x - y + z - t = 0$.
   (a) Quelle est la dimension de H ?
   (b) Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le réel α défini par $\alpha = \inf\{\|U - X\|,\ X \in H\}$.
   La valeur α est-elle atteinte ? Si oui, préciser pour quel(s) vecteur(s) de H.
   (c) Déterminer, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la matrice B de la projection orthogonale sur H.

Exercice 15.11 (★★★★)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier qu'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$ en posant :
$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
2. Établir l'existence de réels $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ (on précisera p_0) tels que :
$$(x-1)(x-2)\dots(x-n) = p_0 + \sum_{k=1}^{n} p_k (x+1)(x+2)\dots(x+k).$$
3. Vérifier que $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ est orthogonal au sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x, x^2, \dots, x^n)$.
   En déduire la distance du polynôme 1 au sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x, x^2, \dots, x^n)$.
4. Déterminer de même la distance de x^n au sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(1, x, \dots, x^{n-1})$.

---

16 Convergence de variables aléatoires

Exercice 16.1 (★)

1. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n : x \mapsto \begin{cases} 1-\cos(2n\pi x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

   Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une densité de probabilité.

2. On considère maintenant une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires ayant toutes f_n comme densité.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition F_{X_n} de X_n.

   (b) En déduire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on donnera la loi.

Exercice 16.2 (★★)

Soit σ un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\frac{n^2x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{n^2x^2}{2\sigma^2}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une densité de probabilité.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densité f_n.

   (a) Déterminer la fonction de répartition de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que X_n admet une espérance et la déterminer.

   (c) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable constante égale à 0.

   (d) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable constante égale à 0.

Exercice 16.3 (★★)

1. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

2. Soit c un réel strictement positif. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = \dfrac{c}{\pi(c^2+t^2)}$.

   (a) Montrer que f est une densité de probabilité.

   (b) Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densité f. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $Z_n = \dfrac{\pi}{nc}M_n$.

   (a) Déterminer la fonction de répartition de M_n puis la fonction de répartition de Z_n.

   (b) Soit $x \in]-\infty, 0]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le F_{Z_n}(x) \le \dfrac{1}{2^n}$.
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x)$.

   (c) Soit $x \in]0,+\infty[$. Montrer que $n\ln\left(\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{nx}{\pi}\right) + \frac{1}{2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{x}$.
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x)$.

(d) Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 16.4 (★★)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toute la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

1. Montrer que Y_n suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
2. Montrer que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable que l'on précisera.
3. Montrer qu'il s'agit également d'une convergence en probabilité.

Exercice 16.5 (★★)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{\pi}\dfrac{n}{1+n^2t^2}$ est une densité de probabilité.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densité f_n.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n n'admet pas d'espérance.
   (b) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 0.

Exercice 16.6 (★★)

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui converge en loi vers la variable certaine égale à c.
Montrer que cette suite converge en probabilité vers c.

Exercice 16.7 (★★★)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et qu'il existe un réel λ_n tel que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X_n = k) = \lambda_n k.$$

1. (a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Calculer λ_n.
   (b) Étudier la convergence en loi de la suite (X_n) de variables aléatoires.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F_n de Y_n.
   (b) Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable Y dont on précisera la fonction de répartition.

Exercice 16.8 (★★★)

Certains disent qu'une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suit une loi géométrique à valeurs dans $\mathbb{N}$ de paramètre p ($p \in]0,1[$) si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = pq^n \quad \text{où} \quad q = 1 - p.$$

1. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui suivent une loi géométrique de paramètre p à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   Étudier la loi de $X + Y$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. X_n et Y_n sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui suivent une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

   (a) Étudier la loi de $Z_n = \dfrac{X_n + Y_n}{n}$. Calculer $E(Z_n)$.

   (b) Calculer pour tout réel t différent de 1 et pour tout élément i de $\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{i}(k+1)t^k$.
   Trouver la fonction de répartition F_n de Z_n.

   (c) $F(x) = 0$ si $x < 0$ et $F(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$ si x est un réel positif ou nul.
   Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

   (d) Montrer que Z_n converge en loi vers une variable aléatoire à densité Z dont on précisera la loi. Calculer $E(Z)$.

Exercice 16.9 (★★★ - QSP HEC)

n personnes ($n \geq 3$) jouent à s'échanger un ballon de manière aléatoire. Au début du jeu, c'est le joueur 1 qui a le ballon. On note X_p la variable aléatoire égale au numéro du joueur possédant le ballon avant le $(p+1)$-ème lancer.

1. Quelle est la loi de X_0 ?

2. Déterminer la loi de X_1.

3. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad P(X_{p+1} = k) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-1} P(X_p = k).$$

4. En déduire la valeur de $P(X_p = k)$.

5. Étudier la convergence en loi de (X_p).

Exercice 16.10 (★★★)

Soit (p_n) une suite de réels appartenant à $]0, 1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p_n.

1. On suppose que (p_n) converge vers 1.

   (a) Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).

   (b) La suite (X_n) converge-t-elle en probabilité ?

2. On suppose que (p_n) converge vers 0.

   (a) Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).

   (b) On pose $Y_n = p_n X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite en loi de la suite $(p_n X_n)$?

Exercice 16.11 (★★★ - QSP ESCP 2022)

Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite monotone strictement positive. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \geq 1$, X_n suit la loi exponentielle de paramètre λ_n. Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 16.12 (★★★ - QSP HEC 2022)
On considère pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire Z_n qui est simulée dans la fonction `Python` ci-dessous.

```
def Z(n,lbd):
      X = rd.exponential(1/lbd,[2,n])
      c = 0
      for k in range(n):
            if X[0,k] <= X[1,k] :
                  c = c+1
      return c/n
```

Montrer que la suite de variables aléatoires (Z_n) converge en probabilité vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

---

17 Fonctions de plusieurs variables sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 17.1 (★)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 - xy^3 + 3y^4$.

1. Montrer que f admet un unique point critique a.
2. Montrer que f admet en a un minimum global.
   On pourra remarquer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$$x^4 - xy^3 + 3y^4 = \left(x^4 - x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4\right) + \left(x^2y^2 - xy^3 + \frac{1}{4}y^4\right) + \frac{5}{2}y^4.$$

Exercice 17.2 (★)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^2 - 3xy + 3y^2 + 1.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puis établir qu'elle possède un seul point critique.
2. Développer $\left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$ puis conclure qu'en ce point, f admet un minimum global.

Exercice 17.3 (★)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + xyz + y - z$.
Étudier les extrema de f.

Exercice 17.4 (★★)
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = (x + z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$.

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$.
2. Montrer que f possède un unique point critique $A \in \mathbb{R}^3$ que l'on déterminera. Calculer $f(A)$.
3. Montrer que si $x \geq 0$, alors $f(x,y,z) \geq 0$, et que si $x \leq 0$, alors $f(x,y,z) \geq xe^x$.

4. Déterminer le minimum de la fonction $x \mapsto xe^x$, et en déduire que f atteint son minimum en A.

Exercice 17.5 (★★)

Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + 2x^2 + y^2 - 4xy + 8x - 4y + 2$.

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.
2. Montrer que f admet exactement trois points critiques : $(0,2)$, et deux autres points notés α et β.

   Justifier que f n'admet pas d'extremum en $(0,2)$ et que $f(\alpha) = f(\beta)$.
3. On souhaite étudier la nature des deux points critiques. Pour cela, on cherche à déterminer le signe de $g(x,y) = f(x,y) - f(\alpha)$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que $y \mapsto g(x,y)$ est un polynôme de degré 2, et calculer son discriminant, noté $\Delta(x)$.
   (b) Montrer que la fonction Δ est de signe constant.
   (c) Conclure.

Exercice 17.6 (★★)

On considère l'application φ définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+t)}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

ainsi que l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \varphi(x^2 + y^2).$$

1. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa dérivée.
2. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer le gradient de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.
4. Déterminer la dérivée de f en $(0,0)$ dans toute direction. Même question au point $(1,1)$
5. Justifier l'existence et écrire le développement limité à l'ordre 1 de f en $(0,0)$.
   Déterminer l'équation de l'hyperplan tangent au graphe de f en $(0,0)$.
   Même question au point $(1,1)$.

Exercice 17.7 (★★)

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y) = e^x(x + y^2 + e^x)$. On considère également la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1 + t + 2e^t$.

1. Montrer que g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et calculer ses dérivées partielles.
2. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$. Justifier que $\alpha \in [-2, -1]$.
3. En déduire que g possède un unique point critique, que l'on exprimera en fonction de α.
4. En remarquant que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g(x,y) \geq g(x,0)$, montrer que g possède un minimum global.

Exercice 17.8 (★★)
Pour tous réels x et y, on note :

$$f(x,y) = (2+x)^2 + (1+2y)^2 + (3+x-y)^2.$$

On étudie les extrema globaux de f.

1. Justifier que f n'admet pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$.

   On étudie si f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. On propose pour cela deux méthodes.

2. **Méthode 1.** On se place $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. On note $a = (-2,1,3)$ et $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1,0,-1)$ et $u_2 = (0,-2,1)$.
   (a) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x,y) = \|a - (xu_1 + yu_2)\|^2$.
   (b) En déduire que la fonction f admet un minimum atteint en un unique couple (x_0, y_0) que l'on déterminera, et préciser la valeur de ce minimum.

3. **Méthode 2.**
   (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer ses points critiques éventuels.
   (b) Étudier la nature de ce(s) point(s), et retrouver ainsi le résultat de la question 2.

Exercice 17.9 (★★)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f : (x,y) \mapsto \dfrac{-3y}{x^2+y^2+1}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Déterminer les extrema de f.

---

18 Endomorphismes symétriques

Exercice 18.1 (★★)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ défini par $f(P) = (x^2-1)P''(x) + 3xP'(x)$.

1. Montrer que $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
2. (a) Montrer que pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$, $(f(P)|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{3}{2}} P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t$.
   (b) En déduire que f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[x]$. f est-il diagonalisable ?
3. Déterminer les valeurs propres de f. f est-il un automorphisme ?
4. On suppose dans cette question que $n = 2$. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[x]$ formée de vecteurs propres de f.

Exercice 18.2 (★★)
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
   Montrer que si la forme quadratique associée à M est strictement positive alors les valeurs propres de M sont toutes strictement positives.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose $\varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 P(t)t^k \, \mathrm{d}t \right) x^k$.

   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

   (b) Écrire la matrice M de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
   Justifier que M est diagonalisable.

   (c) Pour $U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, montrer que ${}^tUMU = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} u_k t^k \right)^2 \mathrm{d}t$.

   (d) En déduire que toutes les valeurs propres de φ sont strictement positives.

Exercice 18.3 (★★)

Toutes les matrices de cet exercice sont réelles d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Soit R une matrice symétrique réelle telle que $\mathrm{Sp}(R) \subset \mathbb{R}_+^*$.

   (a) Justifier l'existence d'une matrice P orthogonale et D diagonale à coefficients diagonaux tous strictement positifs, telles que :
   $$ {}^tPRP = D. $$

   (b) Montrer qu'il existe une matrice E diagonale à coefficients diagonaux tous strictement positifs, telle que $E^2 = D$.

   (c) En déduire qu'il existe une matrice symétrique inversible S telle que $S^2 = R$.

2. Soit Q une matrice orthogonale et S une matrice symétrique. On pose $A = QS$. Exprimer ${}^tAA$ en fonction de S.

3. Soit A une matrice inversible.

   (a) Vérifier que ${}^tAA$ est une matrice symétrique inversible.

   (b) Justifier que pour tout vecteur X non nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit scalaire $\langle {}^tAAX, X\rangle$ est strictement positif. En déduire que $\mathrm{Sp}({}^tAA) \subset \mathbb{R}_+^*$.

   (c) Montrer qu'il existe Q une matrice orthogonale et S une matrice symétrique telles que $A = QS$.

Exercice 18.4 (★★)

Soit E un espace euclidien et soit f un endomorphisme de E tel que : $\forall x \in E,\ \langle f(x), x\rangle = 0$.

1. Montrer que : $\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^\perp$.

3. Montrer que si λ est valeur propre de f, alors $\lambda = 0$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 18.5 (★★)

Soit $m \geq 3$ et soit $A \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $n \geq 2$ tel que $A^n = {}^tA$.

1. Montrer que $A^{n^2} = A$.

2. On pose $B = A^{n+1}$. Montrer que B est une matrice symétrique et que $B^n = B$.

3. Que peut-on en déduire des valeurs propres de B ?

4. On suppose que -1 est valeur propre de B, et soit V un vecteur propre associé. En calculant de deux manières différentes ${}^tVBV$, montrer qu'on aboutit à une contradiction et donc que -1 n'est pas valeur propre de B.

5. Montrer que B est la matrice d'un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^m$.

Exercice 18.6 (★★)
On note E l'espace vectoriel des fonctions polynômes à cœfficients réels, de degré inférieur ou égal à 2.
On considère l'application φ définie pour tout couple (P, Q) d'éléments de E par :

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1).$$

1. Vérifier que φ est un produit scalaire.
   On suppose désormais que E est muni de ce produit scalaire que l'on note $\langle ., .\rangle$.

2. On considère l'application u définie pour tout P de E par :

$$u(P) = 2P'(0)X^2 - (P(1) + P(-1))X.$$

   (a) Montrer que u définit un endomorphisme de E.
   (b) Vérifier que pour tout $P \in E$, on a $2P'(0) - P(1) + P(-1) = 0$.
   (c) En déduire que pour tout $P \in E$, $\langle u(P), P\rangle = 0$.
   (d) Soit (P, Q) un couple d'éléments de E.
   Développer $\langle u(P + Q), P + Q\rangle$ et en déduire que $\langle u(P), Q\rangle = -\langle P, u(Q)\rangle$.
   On dit que u est un endomorphisme *antisymétrique* de E.

3. Soit $P_1 = \dfrac{1}{2}(X^2 + X)$ et $P_2 = \dfrac{1}{2}u(P_1)$.

   (a) Vérifier que P_1 est un vecteur propre de u^2 et que la famille (P_1, P_2) est orthonormale.
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
   (c) Déterminer une base orthonormale $\mathscr{B}$ de E et un nombre réel a tels que la matrice associée à u relativement à cette base soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (d) En déduire les valeurs propres de u^2. En déduire que u^2 est un endomorphisme symétrique de E et déterminer ses valeurs propres.

Exercice 18.7 (★★★)
Soit un espace E euclidien de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E.
Soit u un endomorphisme de E antisymétrique, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall\,(x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle.$$

1. Soit λ un réel. Montrer que si λ est valeur propre de u alors $\lambda = 0$.

2. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.

3. Montrer que u^2 est un endomorphisme symétrique de E et que les valeurs propres de u^2 sont négatives ou nulles.

4. On suppose de plus que u est non nul.
   (a) Justifier que u^2 est diagonalisable et montrer que u^2 admet au moins une valeur propre non nulle.
   Soit a un vecteur propre de u^2 associé à une valeur propre non nulle et F le sous-espace vectoriel engendré par $(a, u(a))$.
   (b) Montrer que F est un plan vectoriel stable par u.
   (c) Montrer que $F^\perp$ est stable par u.
   (d) On munit $F^\perp$ du produit scalaire $\langle .,. \rangle_1$ défini pour tout couple (x, y) d'éléments de $F^\perp$ par :
   $$\langle x, y \rangle_1 = \langle x, y \rangle.$$
   On définit l'endomorphisme u_1 de $F^\perp$ par : $\forall x \in F^\perp,\ u_1(x) = u(x)$.
   Montrer que u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^\perp$ et que $\mathrm{Im}(u) = F \oplus \mathrm{Im}(u_1)$.
   (e) Montrer que le rang d'un endomorphisme antisymétrique est pair.
   On pourra faire une récurrence sur la dimension de E.

5. Dans cette question, E est un espace vectoriel euclidien de dimension 4 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormale de E.
   Soit u l'endomorphisme de E associé, relativement à la base $\mathscr{B}$, à la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que u est un endomorphisme antisymétrique de E.
   Vérifier que le vecteur $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ est vecteur propre de u^2.
   (b) Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(f_1, u(f_1))$.
   Déterminer une base orthonormale de F et une base orthonormale de $F^\perp$.
   (c) En déduire une base orthonormale $\mathscr{B}_0$ de E et deux nombres réels a et b tels que la matrice associée à u relativement à $\mathscr{B}_0$ soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 18.8 (★★★)

Soient E un espace euclidien de dimension n et p endomorphismes symétriques $u_1, \dots, u_p$ de E. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on note $q_i : x \in E \mapsto \langle u_i(x), x \rangle \in \mathbb{R}$.
On suppose que pour tout $x \in E$, $q_1(x) + \cdots + q_p(x) = \|x\|^2$ et que $\mathrm{rg}(u_1) + \cdots + \mathrm{rg}(u_p) = n$.

1. Montrer que $u_1 + \cdots + u_p = \mathrm{Id}_E$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(u_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(u_p) = E$.
3. Montrer que les u_i sont en fait des projecteurs orthogonaux et que la somme précédente est orthogonale.

Exercice 18.9 (★★★ - QSP ESCP 2014)

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA \times A = {}^tB \times B$.

1. Montrer que A et B ont même noyau.
2. On suppose B inversible. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale U telle que $A = U \times B$.

Exercice 18.10 (★★★ - QSP HEC 2012)
Soit E un espace euclidien et soit f un endomorphisme symétrique de E. On suppose qu'il existe une constante réelle $\alpha \geq 0$ telle que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \alpha\|x\|$. Montrer que $f^2 = \alpha^2 \mathrm{Id}_E$.

Exercice 18.11 (★★★★ - Oral HEC 2016)
On considère un espace euclidien $(E, (|))$ de dimension $n \geq 2$.
On note $T(E)$ l'ensemble des endomorphismes u de E qui sont symétriques, de rang inférieur ou égal à 1 et tels que pour tout $x \in E, (u(x) \mid x) \geq 0$.

1. Si $a \in E$, on note u_a l'application de E dans E qui à tout vecteur x de E associe $u_a(x) = (a \mid x)a$.
   (a) Montrer que pour tout $a \in E, u_a \in T(E)$.
   (b) Si a est un vecteur non nul de E, préciser les valeurs propres et sous-espaces propres de u_a.
2. Soit u un élément non nul de $T(E)$ et b un vecteur non nul de $\operatorname{Im} u$.
   (a) Montrer que b est vecteur propre de u associé à une valeur propre $\mu \geq 0$.
   (b) Montrer que pour tout vecteur x de $E, u(x) = \frac{\mu}{\|b\|^2}(x \mid b)b$.
   (c) En déduire qu'il existe un vecteur a de E tel que $u = u_a$.
   (d) L'application φ de E dans $T(E)$ qui à a associe $\varphi(a) = u_a$ est-elle surjective? injective ?
3. Soit a un vecteur non nul de E et f un endomorphisme de E.
   (a) Pour $x \in E$, expliciter $f \circ u_a(x)$.
   (b) Montrer que $f \circ u_a$ est symétrique si et seulement si a est vecteur propre de f.
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f \circ u_a$ appartienne à $T(E)$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in E^2$ pour que $u_a \circ u_b = u_b \circ u_a$.

---

19 Estimation ponctuelle

Exercice 19.1 (★★)
Soit θ un paramètre réel inconnu et X une variable aléatoire à densité. On dit que X suit la loi $\mathscr{L}(\theta)$ si une densité f de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}.$$

Soit n un entier naturel. On considère un $(2n+1)$-échantillon $(X_1, \ldots, X_{2n+1})$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi $\mathscr{L}(\theta)$.

1. (a) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.
   (b) En déduire que la variable aléatoire $X - \theta$ suit une loi $\mathscr{L}(0)$.
   (c) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $X - \theta$, puis celles de X.
2. On pose $\overline{X_{2n+1}} = \dfrac{1}{2n+1} \displaystyle\sum_{i=1}^{2n+1} X_i$.
   (a) Montrer que $\overline{X_{2n+1}}$ est un estimateur sans biais du paramètre θ.
   (b) L'estimateur $\overline{X_{2n+1}}$ est-il convergent ?

Exercice 19.2 (★★)

On considère n variables aléatoires réelles ($n \geq 2$) indépendantes $X_1, \ldots, X_n$, de même loi de densité :

$$f_\theta : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3} & \text{si } x \in [0, \theta], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où θ est un paramètre inconnu strictement positif. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. (a) Calculer $E(S_n)$. En déduire l'expression, en fonction de S_n, d'un estimateur S'_n de θ sans biais.
   (b) Calculer $V(S'_n)$. S'_n est-il un estimateur convergent de θ ?
2. (a) Montrer que T_n est une variable à densité, et en déterminer une densité.
   (b) Calculer $E(T_n)$. Construire à partir de T_n un estimateur T'_n sans biais de θ.
   (c) Calculer $V(T'_n)$. T'_n est-il convergent en tant qu'estimateur de θ ?
3. Comparer les estimateurs S'_n et T'_n.

Exercice 19.3 (★★)

Soit a, b,et c trois réels strictement positifs et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ c & \text{si } x \in [0, a] \\ \frac{b}{x^4} & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

1. Déterminer b et c en fonction de a pour que f soit une densité de probabilité continue sur $\mathbb{R}_+$.

   On suppose b et c ainsi définis dans la suite de l'exercice et X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densité f.

   Donner une allure de la représentation de f.
2. Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N}^*$, X admet-elle un moment d'ordre k ?
3. Déterminer l'espérance et la variance de X si elles existent.
4. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On pose :

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

   (a) Construire à partir de T_n un estimateur S_n sans biais de a.
   (b) Calculer $V(S_n)$. S_n est-il un estimateur convergent de a ?

Exercice 19.4 (★★★ - Deux exercices indépendants (QSP ESCP))

1. Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la même loi d'espérance μ et de variance σ^2. On définit deux estimateurs de μ en posant :

$$T_n = \frac{X_1 + X_2}{2} \qquad \text{et} \qquad V_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \frac{X_1 - X_2}{2}.$$

   Lequel de ces deux estimateurs est le meilleur ?

2. Soient T_1 et T_2 deux estimateurs de θ, sans biais et indépendants. Pour tout a réel, on pose $U_a = aT_1 + (1-a)T_2$.

   (a) U_a est-il un estimateur sans biais de θ ?

   (b) Parmi tous les U_a, lequel doit-on privilégier ?

Exercice 19.5 (★★★)

Soit Z une variable aléatoire discrète d'espérance $E(Z) = \theta$ ($\theta \in \mathbb{R}^*$) et de variance $V(Z) = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose d'un n-échantillon $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que Z, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

On pose : $\overline{Z_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} Z_j$. On suppose que θ est inconnu.

1. $\overline{Z_n}$ est-il un estimateur sans biais et convergent de θ ?

2. Soient $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, des réels non nuls et $Y_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta_j Z_j$.

   (a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels $\beta_1, \dots, \beta_n$ pour que Y_n soit un estimateur sans biais de θ.

   (b) Calculer $V(Y_n - \overline{Z_n})$. En déduire que $V(\overline{Z_n}) \leq V(Y_n)$. Interpréter ce résultat.

3. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des réels non nuls, et $U_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j Z_j$. On suppose que U_n est un estimateur sans biais de θ, et que $V_\theta(U_n) = V_\theta(\overline{Z_n})$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}^*$.

   Montrer que $U_n = \overline{Z_n}$ avec une probabilité égale à 1. Interpréter ce résultat.

Exercice 19.6 (★★★★)

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On sait que N est au moins égal à deux, mais on ne connaît pas sa valeur exacte et on cherche à l'estimer. Pour cela, on effectue n tirages avec remise ($n \in N^*$) et on note Z_k le numéro de la boule obtenue au k-ième tirage ($1 \leq k \leq n$). On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k$.

   (a) Donner l'expression, en fonction de M_n, d'un estimateur T_n de N sans biais.

   (b) Montrer que cet estimateur est convergent.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \max(Z_1, \dots, Z_n)$.

   (a) Montrer que pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\{1, \dots, N\}$, on a la relation :

   $$E(Y) = \sum_{k=1}^{N} P(Y \geq k).$$

   (b) Calculer $E(S_n)$. En déduire l'inégalité : $\quad E(S_n) \geq N - \dfrac{N}{n+1}$.

   (c) L'estimateur S_n est-il sans biais ? Que dire lorsque n est grand ?

Exercice 19.7 (★★★★ - Oral ESCP 2015)
On dispose de n variables aléatoires indépendantes notées $X_1, \ldots, X_n$ de même loi de Poisson de paramètre θ inconnu ($\theta \in \mathbb{R}_+^*$) et définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On souhaite estimer $e^{-\theta}$.
On définit, pour tout i élément de $[\![1, n]\!]$, la variable aléatoire Y_i par

$$Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i(\omega) = 0 \\ 0 & \text{si } X_i(\omega) \neq 0 \end{cases}.$$

On pose $\overline{Y_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1. (a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, donner la loi de Y_i.
   (b) Quelle est la loi de $n\overline{Y_n}$? Que vaut l'espérance $E(\overline{Y_n})$?
   (c) Calculer la variance de $\overline{Y_n}$. Conclusion ?

2. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.
   (a) Pour tout k élément de $[\![1, n]\!]$, rappeler la loi de S_k.
   Pour tout entier naturel j, on pose $\varphi(j) = P_{[S_n=j]}(X_1 = 0)$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel j, on a $\varphi(j) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j$.
   On peut ainsi définir l'estimateur $\varphi(S_n) = \varphi(j) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{S_n}$.
   (c) Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une espérance et que $E(\varphi(S_n)) = e^{-\theta}$.
   (d) Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une variance et que :
   $$V(\varphi(S_n)) = e^{-2\theta} \left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1\right).$$
   Conclusion ?

3. On souhaite ici comparer les performances de $\overline{Y_n}$ et de $\varphi(S_n)$ en tant qu'estimateurs de $e^{-\theta}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$e^{\frac{\theta}{n}} \leq \frac{e^\theta}{n} + \frac{n-1}{n}.$$
   (b) Montrer l'inégalité $V(\varphi(S_n)) \leq V(\overline{Y_n})$.
   (c) Comparer les estimateurs $\overline{Y_n}$ et $\varphi(S_n)$ de $e^{-\theta}$.

---

20 Fonctions de plusieurs variables définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$

Exercice 20.1 (★)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$.
Étudier les extrema locaux et globaux de f.

Exercice 20.2 (★)
Étudier les extrema de la fonction f définie par $f(x, y) = x \ln y + y \ln x$.

Exercice 20.3 (★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy - x^2y - xy^2$.
Étudier les extrema locaux et globaux de f.

Exercice 20.4 (★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + xyz + y - z$.
Étudier les extrema locaux et globaux de f.

Exercice 20.5 (★★)

On définit la fonction f sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]-1,+\infty[$ par :

$$\forall (x,y,z) \in U, \quad f(x,y,z) = x\ln(1+z) + (y-1)^2(z-1) + 2z.$$

1. Donner la nature topologique de U.
2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
3. Montrer que f admet un unique point critique A sur U que l'on déterminera.
4. Déterminer la hessienne de f au point A.
5. Le point A est-il un extremum local pour la matrice f ?

Exercice 20.6 (★★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^2(1+y)^3 + y^2.$$

1. Montrer que f possède un seul point critique.
2. (a) Vérifier que, si (x,y) est tel que $\|(x,y)\| \leq 1$, alors on a: $f(x,y) \geq 0$.
   (b) En déduire que f a un minimum local en son point critique. Ce minimum est-il global ?

Exercice 20.7 (★★★)

Dans cet exercice, on désignera par une lettre minuscule un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et par la même lettre majuscule le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par $\varphi(x,y) = {}^tXAY$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On considère un vecteur b de $\mathbb{R}^n$ et on définit l'application f sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}{}^tXAX - {}^tBX$.

1. Montrer que A est symétrique et que les valeurs propres de A sont strictement positives.
2. (a) Montrer que f admet un unique point critique, donné par $X_0 = A^{-1}B$.
   (b) Vérifier qu'en ce point critique, f possède un minimum local.

Exercice 20.8 (★★★ - Oral ESCP 2013)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1,\dots,x_n) = \exp\left(n+1-\sum_{i=1}^n x_i\right) + \sum_{i=1}^n e^{x_i}.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer le gradient de f, et en déduire que f possède un unique point critique $\hat{x}$.
3. Calculer la hessienne $\nabla^2 f(\hat{x})$ de f en ce point critique.
4. En déduire que f admet un minimum local en $\hat{x}$.
5. Ce minimum local est-il un minimum global ?

---

21 Estimation par intervalle de confiance

Exercice 21.1 (★★★ - QSP HEC 2011)

On désire estimer un paramètre réel θ. Soit n un entier naturel non nul, et soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes, et suivant la même loi de fonction de répartition F_θ donnée par

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 1 - e^{\theta - x} & \text{si } x \geqslant \theta \\ 0 & \text{si } x < \theta \end{cases}.$$

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T_n donnée par

$$T_n = n\,(\mu_n - \theta) \ \text{ avec } \mu_n = \min\,(X_1, \dots, X_n)$$

   et reconnaître la loi de T_n.
2. En déduire un intervalle de confiance pour θ au niveau de risque $\alpha \in]0, 1[$.

---

22 Extrema sous contrainte

Exercice 22.1 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note $F = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$.
Soit f l'application de F dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F, \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i \neq j} x_i x_j.$$

1. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F$. Exprimer $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en fonction de $\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k^2$.
2. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F$:

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right).$$

3. En déduire que f admet un maximum global sur F atteint en $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 22.2 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note f_n l'application de $[0, 1]^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n,\ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2} + \cdots + \sqrt{1 - x_n^2}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n possède un minimum m_n et un maximum M_n.
2. Déterminer m_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. (a) Calculer M_1 puis M_2.
   (b) Calculer M_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 22.3 (★★)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ une famille de réels strictement positifs et β un réel strictement positif.
Étudier les extrema de la fonction f définie sur $(]0, +\infty[)^n$ par :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (]0, +\infty[)^n,\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^2}{x_k}$$

sous la contrainte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \beta$.

Exercice 22.4 (★★)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les extrema de la fonction f définie sur $(]0, +\infty[)^n$ par :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (]0, +\infty[)^n,\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^4$$

sous la contrainte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = n$.
