Chapitre 0

Révisions : Suites, fonctions, polynômes

Consignes

On reprend dans ce chapitre les principaux résultats du programme d'ECS sur les suites réelles, les fonctions réelles d'une variable réelle et les polynômes. Rien de nouveau donc, mais il est essentiel de s'assurer que tous les résultats de ce chapitre sont connus, et de combler vos lacunes éventuelles dès maintenant. Ce travail est à faire avec le plus grand sérieux durant les vacances d'été. C'est votre dernière occasion de vous mettre à jour sur ces notions. ***Ce chapitre fera l'objet de la première interrogation de cours le jour de la rentrée.***

Tous les documents de cours sont disponibles sur le site `mathieu-mansuy.fr/ecs2`.

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en ECS au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Suites réelles

Compétences attendues.

- ✓ Savoir identifier et déterminer l'expression explicite d'une suite géométrique, arithmétique, arithmético-géométrique et d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients réels.
- ✓ Savoir justifier la convergence ou la divergence d'une suite par monotonie ou théorèmes de comparaison.
- ✓ Savoir montrer que deux suites sont adjacentes, donc convergentes vers la même limite.
- ✓ Déterminer la limite d'une suite par comparaison, manipulation d'équivalents.

À vous de vous assurer, à l'issue de chaque chapitre, que ces compétences sont bien acquises !

1.1 Exemples de suites réelles

Propriété 1 (Suites arithmétiques, suites géométriques)

- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite *arithmétique* lorsqu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } n \geq n_0, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

Expression explicite : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$.

- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite *géométrique* lorsqu'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } n \geq n_0, \quad u_{n+1} = qu_n.$$

Expression explicite : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, $u_n = q^{n-n_0}u_{n_0}$.

Définition.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmético-géométrique* lorsqu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 1$, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b \tag{1}$$

Méthode.

Pour obtenir l'expression explicite d'une suite arithmético-géométrique (u_n), on procèdera comme suit :

(i) on cherche le point fixe, c'est à dire le réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\alpha = a\alpha + b \tag{2}$$

(ii) En faisant (1)-(2), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_{n+1} - \alpha) = a(u_n - \alpha)$$

On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \alpha$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.

(iii) On donne l'expression explicite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on en déduit celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -u_n + 4 \quad (1)$$

On cherche l'expression explicite de (u_n). On commence par identifier la suite auquel on a à faire : c'est une suite arithmético-géométrique. On en cherche donc le point fixe :

$$\alpha = -\alpha + 4 \quad (2) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 2.$$

En faisant à présent $(1) - (2)$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (u_{n+1} - \alpha) = -(u_n - \alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = -v_n$$

en posant $v_n = u_n - \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison (-1). On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (-1)^n v_0 = (-1)^n(1-2) = (-1)^{n+1}$$

et donc l'expression explicite de (u_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + \alpha = (-1)^{n+1} + 2.$$

Propriété 2 (Relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients réels)

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ satisfait une *relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients réels* s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

Expression explicite : On résout l'équation caractéristique $r^2 = ar + b$.

Résultat à regarder de plus près !

- S'il y a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.
- S'il y a une unique solution réelle r_0, alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\alpha + \beta n) r_0^n$.
- S'il y a deux solutions complexes conjuguées $r_\pm = \rho e^{\pm i\theta}$, alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \rho^n(\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))$.

Pour déterminer α et β, on utilise deux termes de la suite (habituellement u_0 et u_1).

Exemple. Étude de la *suite de Fibonacci.*

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

On cherche une expression explicite de F_n en fonction de n. On remarque tout d'abord que c'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On résout donc son équation caractéristique :

$$r^2 = r + 1 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - r - 1 = 0.$$

Posons $P(r) = r^2 - r - 1$. P admet deux racines réelles distinctes $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. D'après le théorème précédent, on peut donc dire :

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ F_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

Les cas $n = 0$ et $n = 1$ conduisent à résoudre le système : (E) $\left\{ \begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 1 \end{array} \right.$.

Or, on a :

$$(E) \iff \left\{ \begin{array}{l} \mu = -\lambda \\ \lambda(r_1 - r_2) = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right.$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$.

1.2 Convergence des suites réelles

Définition.

Plus difficile,
pour aller plus loin.

- On dit que (u_n) *converge vers* $\ell \in \mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les u_n pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux, ce qui s'écrit en termes quantifiés :

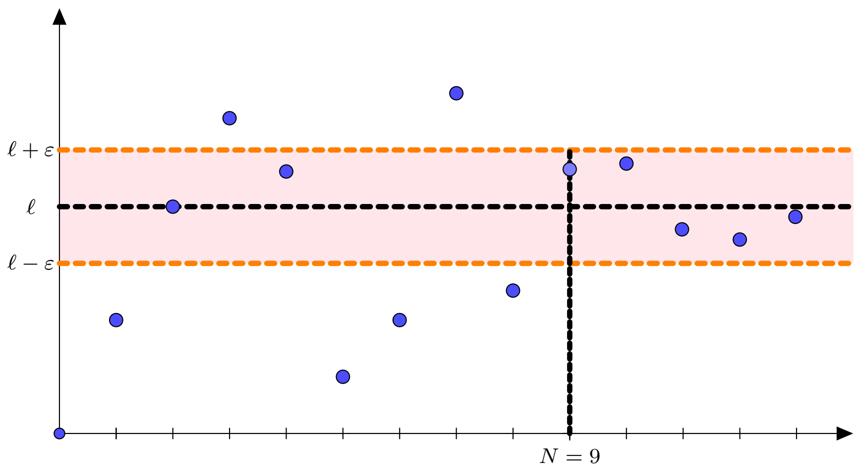
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0 \ \Rightarrow \ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

- On dit que (u_n) *tend vers* $+\infty$ si pour tout réel a, les u_n sont strictement plus grand que a pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux, ce qui s'écrit en termes quantifiés :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0 \ \Rightarrow \ u_n > a.$$

- On dit que (u_n) *tend vers* $-\infty$ si pour tout réel b, les u_n sont strictement plus petit que b pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux, ce qui s'écrit en termes quantifiés :

$$\forall b \in \mathbb{R}, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0 \ \Rightarrow \ u_n < b.$$



Convergence de la suite (u_n) vers ℓ : pour tout $n \geq N$, u_n est dans la « bande » $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

Propriété 3 (Passage à la limite dans les inégalités)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers des limites finies ℓ et ℓ' respectivement. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leq \ell'$.

Mise en garde.

Les inégalités strictes deviennent larges en passant à la limite. Par exemple on a $\dfrac{1}{n+1} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais on n'a pas $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 > 0$.

Théorème 4 (*de la limite monotone*)

- Toute suite croissante et majorée converge.
  Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et minorée converge.
  Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Théorème 5 (*d'encadrement* ou *des gendarmes*)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites vérifiant :

(1) $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang ;

(2) les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Mise en garde.

Il ne faut pas confondre le théorème des gendarmes et le théorème de passage à la limite dans les inégalités, dont les hypothèses et les conséquences sont très différentes.

- Pour appliquer le théorème de passage à la limite dans les inégalités, il faut savoir au préalable que **tous** les termes convergent.
- Le théorème des gendarmes est d'une autre nature et démontre deux choses : la **convergence** de la suite encadrée et la valeur de sa limite.

Propriété 6

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

- Si $\begin{cases} u_n \leq v_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\begin{cases} u_n \leq v_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Définition.

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* si :

(1) (u_n) est croissante ; (2) (v_n) est décroissante ; (3) $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Théorème 7 (*des suites adjacentes*)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Alors **elles convergent vers la même limite** $\ell \in \mathbb{R}$, et on a de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$

1.3 Relations de comparaison des suites

Dans toute cette section, on suppose que les suites considérées ne s'annulent pas (de sorte que le quotient de deux suites est toujours bien défini).

Définition.

On dit que (u_n) *est négligeable devant* (v_n) si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 0. On note alors $u_n = o(v_n)$.

Théorème 8 (*des croissances comparées*)

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ avec $\alpha, \beta > 0$, et $q > 1$. Alors :

$$\ln^\beta n = o\left(n^\alpha\right), \quad n^\alpha = o\left(q^n\right), \quad q^n = o(n!).$$

Remarque. En notant $u_n \ll v_n$ au lieu de $u_n = o(v_n)$, on a donc lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\ln^\beta n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n!.$$

Définition.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est équivalente à* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on note $u_n \sim v_n$ si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1. On note alors $u_n \sim v_n$.

Mise en garde.

Une suite n'est jamais équivalente à la suite nulle : on n'a jamais $u_n \sim 0$!

Remarques.

- On a :
$$u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$$
puisque :
$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n - v_n}{v_n}\right) = 0 \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n).$$
- Si $u_n \sim v_n$, alors (u_n) et (v_n) sont de même signe à partir d'un certain rang. En effet si $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$, alors $\frac{u_n}{v_n} > 0$ à partir d'un certain rang et u_n et v_n sont bien de même signe.

Propriété 9 (Opérations sur les équivalents)

Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) quatre suites telles que $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$. Alors on a :

- $u_n v_n \sim w_n t_n$;
- $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{w_n}{t_n}$;
- $\forall \alpha > 0,\ u_n^\alpha \sim w_n^\alpha$.

Mise en garde.

- $\sim$ n'est pas compatible avec la somme : par exemple, $n+1 \sim n+2$ et $-n \sim -n$, mais $1 \nsim 2$.
- $\sim$ n'est pas compatible avec la fonction logarithme : par exemple, $1 + \frac{1}{n} \sim 1 + \frac{1}{n^2}$, mais $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \nsim \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ puisque $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \sim \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n \nrightarrow 1$.
- $\sim$ n'est pas compatible avec la fonction exponentielle : par exemple, $n+1 \sim n$, mais $e^{n+1} \nsim e^n$ puisque $\dfrac{e^{n+1}}{e^n} = e \nrightarrow 1$.

Si on souhaite un équivalent d'une somme ou d'une composée, on effectuera un développement limité.

Mise en garde.

Beaucoup trop d'erreurs sont commises sur les relations de comparaisons, notamment sur les équivalents. Si vous avez le moindre doute sur un équivalent, faites le quotient (éventuellement au brouillon) et vérifiez qu'il tend bien vers 1 !

2 Fonctions réelles d'une variable réelle

Compétences attendues.

- ✓ Étudier la continuité d'une fonction en un point, prolonger une fonction par continuité en un point.
- ✓ Déterminer la limite d'une fonction par comparaisons et équivalents usuels.
- ✓ Savoir appliquer le théorème de la bijection pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation.
- ✓ Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point, le caractère $\mathscr{C}^1$ à l'aide du théorème de passage à la limite sur la dérivée.
- ✓ Savoir étudier les variations d'une fonction de la variable réelle (domaine de définition, calcul de la dérivée, tableau de variations, limites aux bornes du domaine, asymptotes éventuelles).
- ✓ Savoir calculer le développement limité d'une fonction par somme ou produit des DL usuels, et en déduire une limite ou un équivalent.
- ✓ Montrer qu'une fonction est convexe/concave en étudiant le signe de sa dérivée seconde, et en déduire des inégalités de convexité (positions relatives courbe/tangente et courbe/corde).

2.1 Limite et continuité d'une fonction d'une variable

Dans toute la suite, f est une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, x_0 est un élément ou une extrémité de I.

Définition.

On dit que f *admet* $\ell \in \mathbb{R}$ *pour limite en* x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],\ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Lorsque x_0 appartient à I, on dira que f *est continue en* x_0, et on a alors $\ell = f(x_0)$. Sinon on dira que f *se prolonge par continuité en* x_0 en posant $f(x_0) = \ell$.

On dit que f *est continue sur* I si f est continue en tout point de I.

Remarque. Cette définition s'étend au cas où f est définie sur $I \setminus \{x_0\}$, aux limites à droite $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ et à gauche $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, au cas de limite en $\pm\infty$ et au cas des limites infinies.
On révisera si nécessaire les opérations sur les limites (somme, produit, quotient et composée).

Propriété 10 (Limites usuelles en 0)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Preuve. Il s'agit des limites des taux d'accroissements des fonctions en 0. Par exemple pour $f(x) = \ln(1+x)$ qui est dérivable en 0, on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1, \quad \text{soit} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

□

Propriété 11 (*Caractérisation séquentielle de la limite*)

On suppose que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe et vaut $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors pour toute suite (u_n) d'éléments de I convergeant vers x_0, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell.$$

En particulier si f est continue en x_0 et si la suite (u_n) converge vers x_0, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.

Méthode.

Pour montrer que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *n'existe pas, on cherche deux suites* (u_n) *et* (v_n) *convergeant vers* x_0 *et telles que* $\lim f(u_n)$ *et* $\lim f(v_n)$ *existent et sont distinctes.*

Exemple.

La fonction $f(x) = \cos(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$. En effet, considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2n\pi \quad \text{et} \quad v_n = (2n+1)\pi.$$

Ces deux suites tendent vers $+\infty$, et on a :

$$f(u_n) = \cos(2n\pi) = 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \quad \text{et} \quad f(v_n) = \cos((2n+1)\pi) = \cos(\pi) = -1 \underset{n\to+\infty}{\to} -1.$$

Puisque $-1 \neq 1$, on peut donc conclure par la proposition précédente que f n'a pas de limite en $+\infty$.

Exemple. Limites éventuelles des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue, et soit (u_n) une suite définie par :

$$u_0 \in [a,b] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (*)$$

Si on établit que (u_n) **converge** vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$, alors cette limite est un point fixe de f sur $[a,b]$, c'est à dire :

$$\ell = f(\ell).$$

En effet puisque f est continue, on peut passer à la limite quand $n \to +\infty$ dans $(*)$ pour obtenir $\ell = f(\ell)$. Pour l'étude des suites récurrentes d'ordre 1, je vous renvoie au

☞ **Complément de cours 0. Méthodes d'étude d'une suite récurrente d'ordre 1.** disponible à l'adresse `mathieu-mansuy.fr/ecs2`.

Propriété 12

f est continue en $x_0 \in I$ si et seulement si f admet une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et que

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

Exemple.
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Elle est continue sur $\mathbb{R}_-$ car constante, et sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions continues. On vérifie la continuité en 0 :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

Donc f est bien continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$.

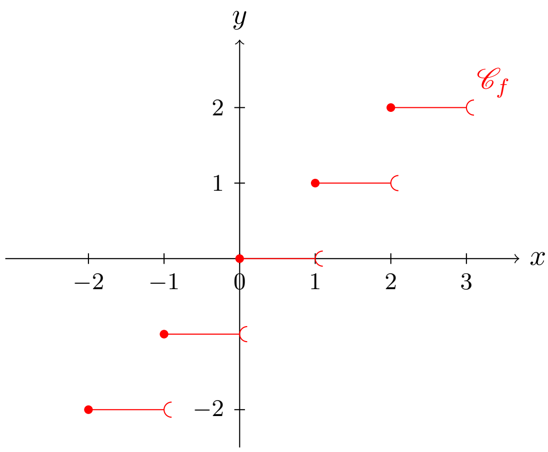
Exemple. La fonction *partie entière.*
Rappelons que la *partie entière d'un réel* x, notée $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier inférieur ou égal à x. Ainsi, on a :

$$\lfloor 0 \rfloor = 0 \quad , \quad \lfloor 2,5 \rfloor = 2 \quad , \quad \lfloor \pi \rfloor = 3 \quad , \quad \lfloor -\pi \rfloor = -4.$$

Rappelons également les inégalités définissant la partie entière de x (à connaitre) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Représentons le graphe de la fonction partie entière $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.



Étudions la continuité de f en 0. On a :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0.$$

Puisque $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq f(0)$, la fonction partie entière est discontinue en 0. On peut préciser en disant qu'elle est discontinue à gauche en 0, et continue à droite en 0 (puisque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$).

Plus généralement, la fonction partie entière est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$, mais n'est continue à gauche qu'aux points de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Propriété 13

On suppose que $x_0 \in I$ et que f est définie sur $I \setminus \{x_0\}$.

f est prolongeable par continuité en x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ et $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existent et sont finies, et que ces limites sont égales.

Si on note ℓ cette limite commune, alors f se prolonge par continuité en posant $f(x_0) = \ell$.

Exemple. La fonction *sinus cardinal*.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ pour tout $x \neq 0$. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ comme quotient de fonctions continues. De plus on a :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 = \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

Par le résultat précédent, f est donc prolongeable par continuité en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant $f(0) = 1$. Cette fonction s'appelle communément sinus cardinal.

Exemple. La fonction *puissance*.

Soit $\alpha > 0$. On définit la fonction puissance p_α sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad p_\alpha(x) = e^{\alpha \ln(x)} \quad \text{qu'on notera } x^\alpha.$$

La fonction p_α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions qui le sont. De plus on a $\lim_{x \to 0^+} e^{\alpha \ln(x)} = 0$ (car $\alpha > 0$). Donc p_α peut être prolongée par continuité en 0 en posant $p_\alpha(0) = 0$, soit $0^\alpha = 0$. Notons qu'ici, il nous a suffit de regarder la limite à droite puisque p_α n'est pas définie « à gauche de 0 ».

2.2 Théorèmes d'existence de limites

Propriété 14

Soit $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in I, \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

Soit x_0 un point ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). Alors :

- *Théorème des gendarmes.* Si g et h admettent une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0, alors $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut ℓ.
- Si $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut $+\infty$.
- Si f et h admettent ℓ et ℓ' pour limites finies respectives en x_0, alors $\ell \leq \ell'$.

Propriété 15 *(de la limite monotone)*

Soit f une fonction croissante[a] sur un intervalle I.

- Supposons que $I =]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
  - Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b.
    Sinon on a $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$.
  - Si f est minorée, alors f admet une limite finie en a.
    Sinon on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.
- Soit $x_0 \in I$. La fonction f admet une limite à gauche et à droite en x_0, et on a :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

[a] Le cas décroissant s'énonce de manière analogue.

2.3 Relations de comparaison

Dans toute cette section :

- I désignera un intervalle réel non vide et non réduit à un point, a un point ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$), $\mathscr{D}$ désignera I ou $I \setminus \{a\}$;
- toutes les fonctions considérées seront supposées continues sur $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et supposées non nulles sur $I \setminus \{a\}$ (de sorte que le quotient de deux fonctions est toujours bien défini sur $I \setminus \{a\}$).

Définition.

Soient f et $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$. On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.
On note alors $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$.

Remarque. $f(x) \underset{x \to a}{=} o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Théorème 16 *(des croissances comparées)*

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

$$(\ln(x))^\beta \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha), \quad x^\beta \underset{+\infty}{=} o\left(e^{\alpha x}\right), \quad |\ln(x)|^\beta \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad e^{\alpha x} \underset{-\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

Définition.

Soient f et $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$. On dit que f est *équivalente* à g au voisinage de a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$.

Remarques.

- $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \iff f(x)-g(x) \underset{a}{=} o(g(x))$.
- Si $P(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_q x^q$ $(p \geq q)$ est une fonction polynomiale, alors :
$$P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_p x^p \quad \text{et} \quad P(x) \underset{0}{\sim} a_q x^q.$$

Propriété 17 (Équivalents classiques au voisinage de 0)

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}^*$$

$$\sin x \underset{0}{\sim} x \qquad 1-\cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad \tan x \underset{0}{\sim} x \qquad \arctan x \underset{0}{\sim} x$$

Propriété 18 (Opérations sur les équivalents)

Soient f, g , h, u quatre fonctions définies sur $\mathscr{D}$. Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et si $h(x) \underset{x \to a}{\sim} u(x)$, alors :

- $f(x)h(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)u(x)$;
- $\dfrac{f(x)}{h(x)} \underset{x \to a}{\sim} \dfrac{g(x)}{u(x)}$;
- $\forall p \in \mathbb{N}$, $f(x)^p \underset{x \to a}{\sim} g(x)^p$;
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, et si f^α et g^α sont bien définies sur $\mathscr{D}$, alors $f(x)^\alpha \underset{a}{\sim} g(x)^\alpha$.

Mise en garde.

L'équivalence **n'est pas compatible avec la somme ou la composition avec les fonctions** ln **ou** exp. Si on souhaite obtenir un équivalent d'une somme ou d'une composée, on effectuera un développement limité.

2.4 Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème 19 (*des valeurs intermédiaires*)

L'image d'un intervalle par une fonction **continue** est un intervalle.

Autrement dit si I est un intervalle et f une fonction **continue** sur I, alors pour tout $a, b \in I$ avec $a < b$, et pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = y$ admet **au moins une solution** dans $[a, b]$.

Propriété 20

Une fonction **continue sur un segment** est bornée et atteint ses bornes.

En particulier, l'image d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue est un segment et les bornes sont atteintes :

$$\exists \alpha, \beta \in [a,b], \quad f(\alpha) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad f(\beta) = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Théorème 21 *(de la bijection)*

On suppose f **continue et strictement monotone** sur un intervalle I. Alors :

- f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.

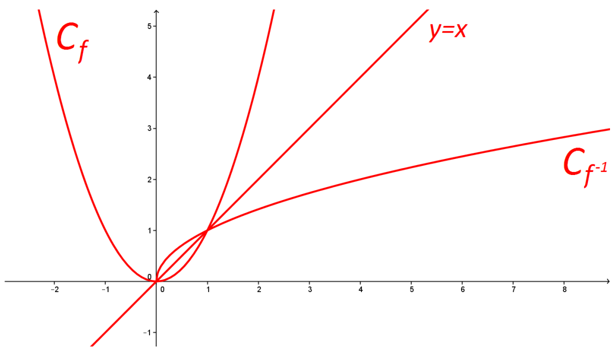
  Autrement dit pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet **une unique solution** dans I.

- En notant f^{-1} la bijection réciproque, on a :
  - f^{-1} est continue sur J et a même sens de variation que f ;
  - dans un repère orthonormé, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple.

La fonction carré $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$: elle n'est ni injective (car $f(-1) = f(1) = 1$), ni surjective (car -1 n'a pas d'antécédent par f).

Considérons la restriction de f sur $\mathbb{R}_+$: elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans l'intervalle $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. On appelle sa bijection réciproque la fonction *racine carré*, notée $x \mapsto \sqrt{x}$. On a de plus par le théorème précédent que $\sqrt{\ }$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.



Courbes représentatives des fonctions carré et racine carré, symétriques par rapport à la droite $y = x$.

2.5 Dérivation

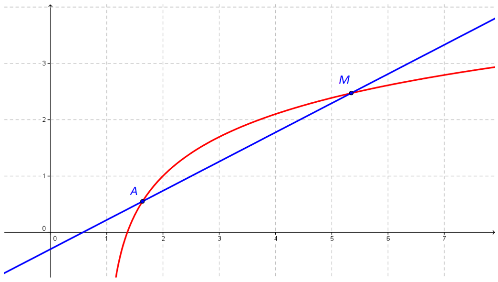
Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f *est dérivable en a* si son *taux d'accroissement* en a :

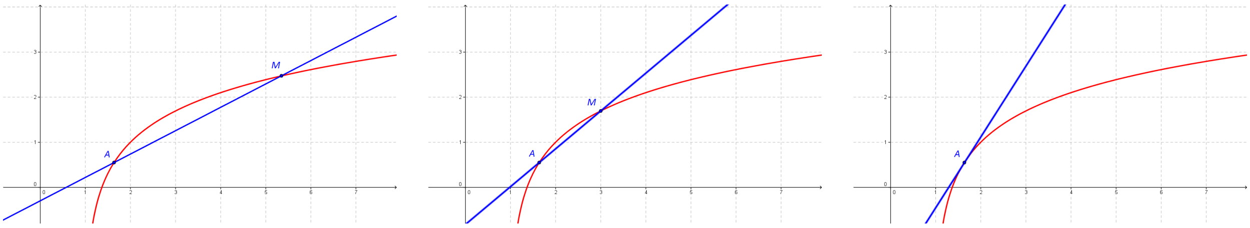
$$\tau_a(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array} \right.$$

admet une limite finie en a. Cette limite, lorsqu'elle existe, est le nombre dérivée de f en a. On le notera $f'(a)$.

Interprétation géométrique. Fixons $a \in I$ et considérons $x \in I$, $x \neq a$. On note $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ un point distinct de A appartenant à la courbe représentative de f. Le taux d'accroissement est le coefficient directeur de la corde (AM).



Par définition, f est dérivable en a si et seulement si le coefficient directeur de la droite (AM) admet une limite quand x tend vers a.



Dans ce cas, la position limite de la droite (AM) lorsque M tend vers A est la *tangente* à $\mathscr{C}_f$ au point A. Son coefficient directeur est donc $f'(a)$, et son équation cartésienne est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

On dit que f est *dérivable à droite* (resp. *à gauche*) en a si $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en a. Si elles existent, on note alors ces limites $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$, appelées dérivées à droite ou à gauche de la fonction f en a. On appelle alors *demi-tangentes à droite et à gauche* à la courbe les demi-droites définies respectivement par :

$$x \geq a \quad \text{et} \quad y = f(a) + f'_d(a)(x - a),$$

$$x \leq a \quad \text{et} \quad y = f(a) + f'_g(a)(x - a).$$

Remarque. Lorsque le taux d'accroissement a pour limite l'infini à gauche ou à droite, on parle de *demi-tangente verticale*.

Propriété 22

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$ qui n'est pas une extrémité. On a l'équivalence :

$$f \text{ est dérivable en } a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche en } a \\ f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f'_g(a) = f'_d(a) \end{cases}$$

Dans ces conditions, on a $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Remarque. Si $a \in I$ est l'extrémité inférieure (resp. supérieure) de I, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a.

Exemple.
On sait que la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$. Étudions sa dérivabilité en 0 :

$$\frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} \to \begin{cases} 1 & \text{si } x \to 0^+ \\ -1 & \text{si } x \to 0^- \end{cases}$$

La fonction valeur absolue est donc dérivable à gauche et à droite en 0, de dérivées à gauche et à droite égales à -1 et 1. Elle n'est par contre pas dérivable en 0.

Exemple.
On a vu que la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Étudions sa dérivabilité en 0. 0 étant l'extrémité inférieure de l'intervalle, on étudie la limite à droite du taux d'accroissement :

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$$

La fonction racine carrée n'est donc pas dérivable en 0, et elle admet une demi-tangente verticale en 0.

Propriété 23 (La dérivabilité implique la continuité)

Si f est **dérivable** en a, **alors** f est **continue** en a.

Mise en garde.
La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en un point et non dérivable en ce point. Par exemple, les fonctions valeur absolue ou racine carrée sont continues en 0 et non dérivables en 0.

Définition.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ *est dérivable sur* I si elle est dérivable en chaque point de I. On définit alors la fonction dérivée de f, notée f', par : $f' : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases}$.
- On dit que f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.
  On note $\mathscr{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Remarque. Une fonction dérivable n'est pas nécessairement de classe $\mathscr{C}^1$ (la dérivée peut ne pas être continue).

2.6 Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Ensemble de dérivabilité
$\alpha \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n \in \mathbb{Z}_-^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1 + \tan(x)^2 = \dfrac{1}{\cos(x)^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

2.7 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 24

- Une combinaison linéaire de deux fonctions f et g dérivables (resp. $\mathscr{C}^1$) sur I est dérivable (resp. $\mathscr{C}^1$) sur I et on a :
$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$
- Le produit de deux fonctions f et g dérivables (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur I est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur I et on a :
$$(fg)' = f'g + fg'.$$
- Le quotient de deux fonctions f et g dérivables (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur I et on a :
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$
- Si f est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur I et si g est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur $J \supset f(I)$ alors $g \circ f$ est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur I et on a :
$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$

Remarque. Le dernier point de ce théorème permet d'obtenir la dérivée de certaines composées usuelles :

$$(\ln(f))'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad (\exp(f))'(x) = f'(x)\exp(f(x)), \quad (f^\alpha)'(x) = \alpha f'(x) f^{\alpha-1}(x), \quad (\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}},$$
$$(\cos(f))'(x) = -f'(x)\sin(f(x)), \quad (\sin(f))'(x) = f'(x)\cos(f(x)), \quad (\tan(f))'(x) = f'(x)(1+\tan(f(x))^2).$$

Propriété 25 (Dérivabilité de la fonction réciproque)

Soit f une fonction bijective d'un intervalle I sur un intervalle J. f^{-1} est dérivable sur J si et seulement si f est dérivable sur I et f' **ne s'annule pas** sur I. Et on a alors :

$$\forall\, y \in J, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Exemple.
La fonction tangente est continue sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Elle est de plus dérivable sur cet intervalle, et on a :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad (\tan)'(x) = 1 + \tan(x)^2 > 0.$$

Donc tan est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, on a $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$. Par le théorème de la bijection, tan réalise donc une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. On appelle arctangente sa bijection réciproque, notée arctan. Toujours par le théorème de la bijection, arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Puisque $\tan'$ ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ par le résultat précédent, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan(\arctan(x))^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

2.8 Les grands théorèmes

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f admet un *maximum local* en a s'il existe un réel $\eta > 0$ tel que la fonction $f_{|I\cap[a-\eta,a+\eta]}$ admette un maximum en a, c'est-à-dire :

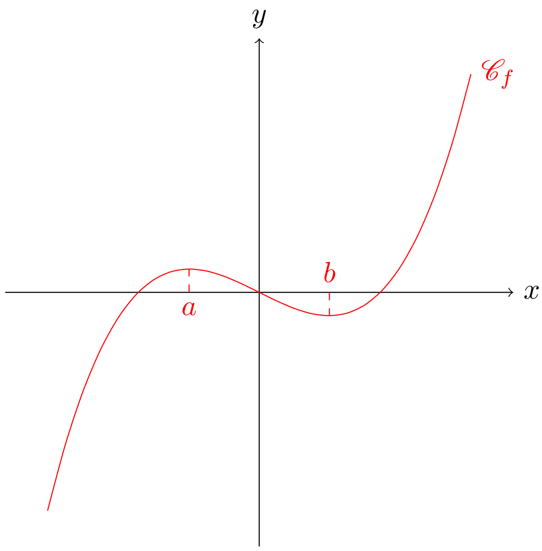
$$\forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta], \quad f(x) \leq f(a)$$

- On dit que f admet un *minimum local* en a s'il existe un réel $\eta > 0$ tel que la fonction $f_{|I\cap[a-\eta,a+\eta]}$ admette un minimum en a, c'est-à-dire :

$$\forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta], \quad f(a) \leq f(x)$$

- On dit que f admet un *extremum local* en a si f admet un maximum local ou un minimum local en a.

Exemple. La fonction f représentée ci-dessous admet deux extrema locaux (et non globaux) en a et b.



Définition.

On suppose que f est dérivable sur I. On dit que a est un *point critique* de f si $f'(a) = 0$.

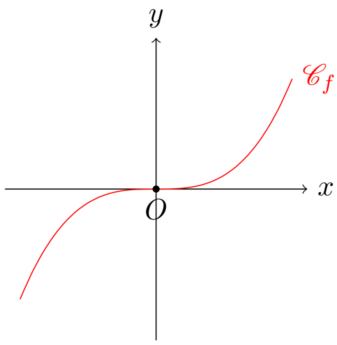
Théorème 26 (Condition nécessaire d'extrémum)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I.

Si f admet un extremum local en un point $a \in I$, **alors** a est un point critique de f.

Mise en garde.

- **La réciproque est fausse** : par exemple, la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ satisfait $f'(0) = 0$, mais f n'admet pas d'extremum local en 0.



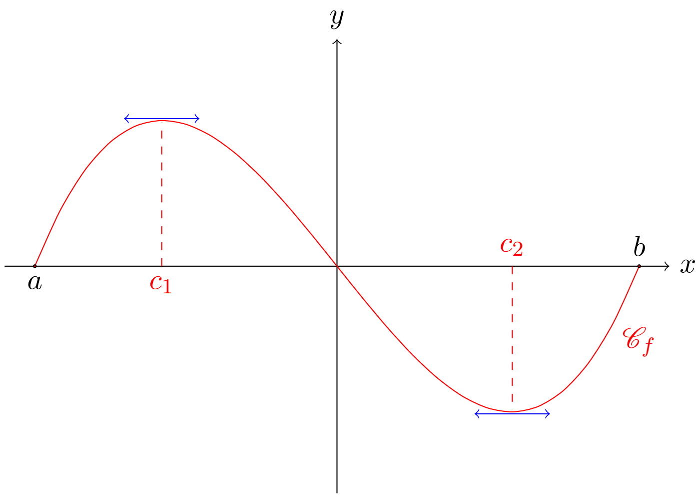
Courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^3$.

- L'hypothèse I **ouvert** est essentielle : par exemple, la fonction $f : x \in [0, 1] \mapsto x \in [0, 1]$ est dérivable sur $[0, 1]$ et a son minimum en 0 et son maximum en 1, mais $f'(0) = f'(1) = 1 \neq 0$.

Propriété 27 (*Théorème de Rolle*)

Soient a et b deux réels avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continue** sur $[a, b]$, **dérivable** sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque. L'élément $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$ n'est pas forcément unique, comme dans l'exemple suivant :



Propriété 28 (*Égalité des accroissements finis*)

Soient a et b deux réels avec $a<b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, **continue** sur $[a,b]$ et **dérivable** sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Interprétation géométrique. L'égalité des accroissements finis se réécrit $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$. Elle signifie qu'il existe (au moins) une tangente au graphe de f sur $]a,b[$ qui soit parallèle à la corde (AB), où $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$.

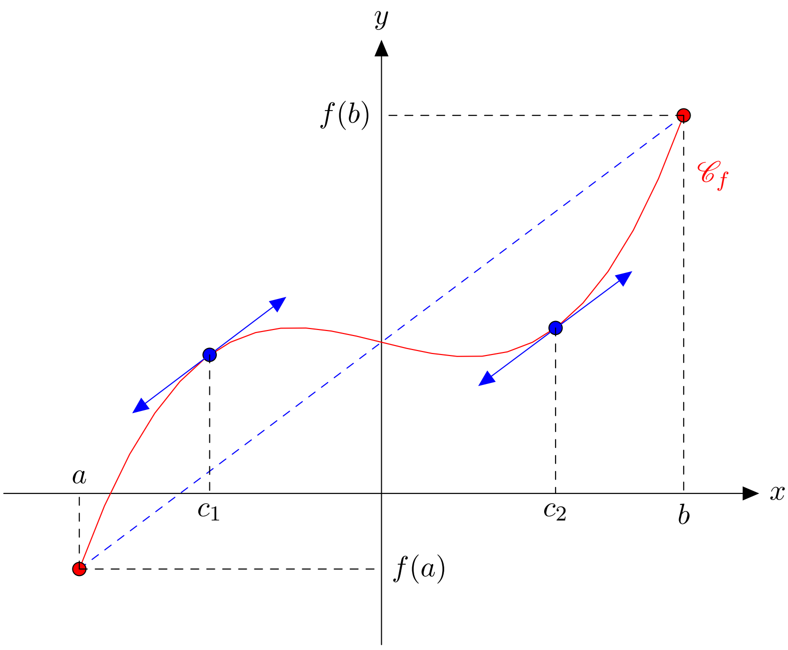


Illustration de l'égalité des accroissements finis.

Cinématiquement, on peut interpréter ce résultat de la manière suivante : si une voiture a réalisé un trajet en roulant à une vitesse moyenne de 80 km/h, alors à un moment du trajet sa vitesse instantanée a été de 80 km/h.

Propriété 29

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.
- f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si f' est positive (resp. négative) sur I.
- Si f' est strictement positive (resp. strictement négative), sauf éventuellement en un nombre fini de points de I où f' s'annule, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Théorème 30 (*Inégalité des accroissements finis*)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continue** sur $[a, b]$ et **dérivable** sur $]a, b[$.

- S'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in]a, b[$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors
$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$
- S'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq M$, alors
$$|f(b) - f(a)| \leq M(b-a).$$

Propriété 31 (*Passage à la limite sur la dérivée*)

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et f une fonction **continue sur** I et **de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $I \setminus \{x_0\}$. On suppose que la limite $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe. On note ℓ cette limite.

- Si $\ell \in \mathbb{R}$ est **finie**, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f'(x_0) = \ell$.
- Si $\ell = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en x_0, et la courbe représentative de f admet une tangente verticale au point d'abscisse x_0.

Exemple.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrons que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

- *Continuité.* f est continue sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$ comme composée et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Étudions la continuité en 0.
$$\frac{e^{x^2} - 1}{x} = x \times \underbrace{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2}}_{\underset{x \to 0}{\to} 1} \underset{x \to 0}{\to} 0 = f(0).$$

Ainsi f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

- *Classe $\mathscr{C}^1$.* f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$ comme composée, quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, et on a :

$$\forall x \neq 0, \quad f'(x) = \frac{2xe^{x^2} \times x - (e^{x^2} - 1)}{x^2} = 2e^{x^2} - \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}.$$

On regarde la limite de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0 :

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 2e^{x^2} - \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 2 - 1 = 1 \in \mathbb{R}.$$

D'après le théorème de passage à la limite sur la dérivée, on conclut que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et que $f'(0) = 1$.

2.9 Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, $\mathscr{C}^\infty$

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On définit récursivement les dérivées successives de f par :

- pour $n = 0$, $f^{(0)} = f$;
- pour $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ est dérivable sur I, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$

Si, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(n)}$ existe, on dit que f est *n fois dérivable sur I*, et on appelle $f^{(n)}$ *la dérivée n-ième de f sur I*. Enfin, on dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est *indéfiniment dérivable sur I* si f est n fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition.

On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ sur I. On dit que :

- $f : I \to \mathbb{R}$ est *de classe $\mathscr{C}^n$ sur I* si f est n fois dérivable sur I, et $f^{(n)}$ est continue sur I. On note $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$.
- On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est *de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I* si f est $\mathscr{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}^n(I)$ les fonctions de classes $\mathscr{C}^n$ de I dans $\mathbb{R}$.

Remarques.

- $\mathscr{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I, et $\mathscr{C}^\infty(I)$ est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I
- f est de classe $\mathscr{C}^n$ si et seulement si f' est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$.
- On a la suite d'inclusions strictes : $\mathscr{C}^\infty(I) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathscr{C}^n(I) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathscr{C}^1(I) \subsetneq \mathscr{C}^0(I)$.

Propriété 32 (Opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^n$)

- Une combinaison de fonctions f et g de classe $\mathscr{C}^n$ sur I est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, et on a :
$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$
- Le produit de fonctions f et g de classe $\mathscr{C}^n$ sur I est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, et on a :
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad \textit{(formule de Leibniz)}$$
- Le quotient de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I dont le dénominateur ne s'annule pas, est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.
- La composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ est de classe $\mathscr{C}^n$: si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, et g de classe $\mathscr{C}^n$ sur $J \supset f(I)$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

2.10 Formules de Taylor

Théorème 33 (*Formules de Taylor*)

- *Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n*
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I.
Soit a et x deux éléments distincts de I.
Alors on a :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \mathrm{d}t.$$
- *Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n*
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I.
On suppose que $|f^{(n+1)}|$ est majorée par un réel M sur I.
Alors pour tout $(a, x) \in I^2$, on a :
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$
- *Formule de Taylor-Young à l'ordre n*
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I.
Alors pour tout $(a, x) \in I^2$, on a :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

2.11 Développements limités

Dans toute cette section :

- I désignera un intervalle réel non vide et non réduit à un point, a un élément ou une extrémité de I, $\mathscr{D}$ désignera I ou $I \setminus \{a\}$;
- toutes les fonctions considérées seront définies sur $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition.

- On dit que $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ admet un *développement limité en a à l'ordre $n \in \mathbb{N}$* (en abrégé $DL_n(a)$) s'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \underbrace{a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n}_{\text{partie régulière}} + \underbrace{o((x-a)^n)}_{\textit{reste}}.$$

- On suppose que $+\infty$ est une extrémité de I. On dit que f admet un *développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de $+\infty$* (en abrégé $DL_n(+\infty)$) s'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \underbrace{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}}_{\text{partie régulière}} + \underbrace{o\left(\frac{1}{x^n}\right)}_{\textit{reste}}.$$

Exemple.

La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{array} \right.$ admet un développement limité à tout ordre en 0. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que :

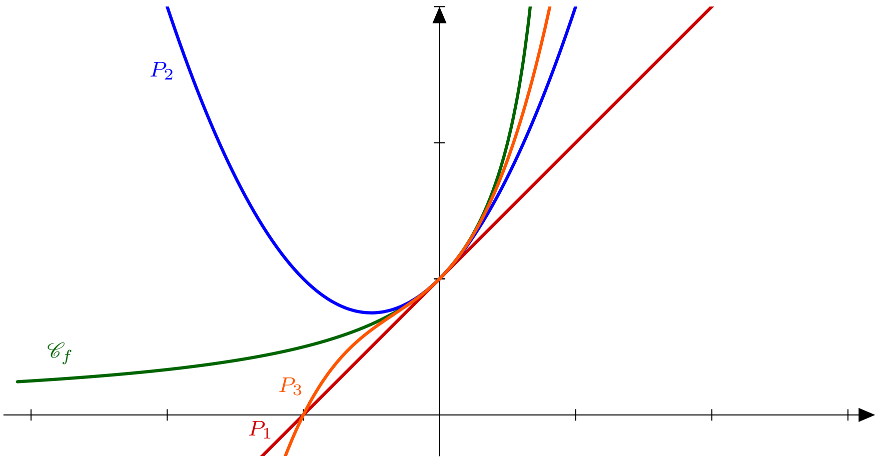
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{x-1}.$$

Comme $\dfrac{x^{n+1}}{x-1} = x^n \times \underbrace{\dfrac{x}{x-1}}_{\underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0} = o(x^n)$, on obtient que $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet un $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on a :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).$$

Remarque. Si f admet un $DL_n(a)$, f peut être approximée **localement** en a par sa partie régulière. Ainsi, la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ peut être approximée localement en 0 par les parties régulières de son développement limité en 0, par exemple à l'ordre 1 (on approxime f par sa tangente en 1), à l'ordre 2 ou 3 par :

$$P_1(x) = 1 + x \quad ; \quad P_2(x) = 1 + x + x^2 \quad ; \quad P_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3.$$



On constate que plus l'ordre est important, plus l'approximation de f par sa partie régulière est bonne au voisinage de 0. Notons également que les parties régulières ne sont de bonnes approximations de f qu'au voisinage de 0. Un développement limité n'a donc d'intérêt qu'au voisinage de a, ce qui justifie la notation $\underset{x\to a}{=}$ dans l'écriture du développement limité.

Théorème 34 (Développements limités classiques au voisinage de 0)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Remarques. Voici quelques méthodes pour retenir, retrouver ou contrôler ces formules de développements limités.

- Le DL de e^x en 0 s'obtient par la formule de Taylor-Young. On retiendra la présence des factoriels au dénominateur !
- Les DL de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ s'obtiennent à partir du DL de e^x par les formules d'Euler :
$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad ; \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$
On retiendra que :
  - cos (resp. sin) étant une fonction paire (resp. impaire), il n'y a que des termes pairs (resp. impairs) dans son DL ;
  - la présence des factoriels dans les DL de cos et sin (provenant du DL de l'exponentiel) ;
  - On n'oubliera pas l'alternance des signes (due aux puissances du i complexe dans les formules).
- Le DL de $\frac{1}{1-x}$ se retrouve à partir de la somme des termes d'une suite géométrique comme expliqué plus haut.
Le DL de $\frac{1}{1+x}$ s'obtient en remplaçant x par $-x$ dans le DL de $\frac{1}{1-x}$.
- Le DL de $\ln(1-x)$ s'obtient en primitivant[1] celui de $\frac{1}{1-x}$. On retiendra en particulier :

[1] Aucun théorème du cours ne permet de justifier qu'on a bien droit de le faire. C'est en fait possible, mais hors programme. On y pensera simplement comme un moyen mémo-technique pour retenir ce DL.

– les facteurs $\dfrac{1}{k}$ dus à l'intégration de x^{k-1} ;

– les signes $-$ dus à l'intégration de $\dfrac{1}{1-x}$ en $-\ln(1-x)$.

On obtient le DL de $\ln(1+x)$ en remplaçant x par $-x$ dans le DL de $\ln(1-x)$.

- Le DL de $(1+x)^\alpha$ se déduit de la formule de Taylor-Young, et est à apprendre par coeur. Il permet notamment d'obtenir les DL de $\sqrt{1+x}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ (avec $\alpha = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$).

Lors de la recherche du $DL(a)$ d'une fonction f dérivable, on contrôlera enfin ses deux premiers termes a_0 et a_1 en notant que :

$$a_0 = f(a) \quad \text{et} \quad a_1 = f'(a).$$

Méthode.

Les développements limités usuels sont donnés en 0. *Lorsqu'on souhaite obtenir le développement limité d'une fonction en* $a \neq 0$, *on procèdera ainsi :*

- *si* $a \in \mathbb{R}$ *: on pose* $h = x - a$ *et on fait le* $DL_n(0)$ *de* $g(h) = f(a+h)$. *On remplace enfin* h *par* $x - a$ *dans le développement de* g.

- *si* $a = \pm\infty$ *: on pose* $h = \dfrac{1}{x}$ *et on fait le* $DL_n(0)$ *de* $g(h) = f(\frac{1}{h})$. *On remplace enfin* h *par* $\dfrac{1}{x}$ *dans le développement de* g.

Exemples.

- Calculons le $DL_3(2)$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

  On pose $h = x - 2$. On a alors :

  $$f(x) = f(2+h) = \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{h}{2}}$$

  On utilise alors le DL en 0 de la fonction $x \to \dfrac{1}{1-x}$ calculé précédemment pour obtenir finalement :

  $$f(2+h) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + o(h^3)\right)$$

  et donc :

  $$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + o((x-2)^3).$$

- Calculons le $DL_2(+\infty)$ de $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$.

  On pose $u = \frac{1}{x}$. Alors $g(u) = \dfrac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + u^2 + o(u^2)$ et on en déduit le $DL_2(\infty)$ de f :

  $$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2}).$$

Propriété 35 (Opérations sur les développements limités)

On peut :

- ajouter deux développements limités en les ajoutant terme à terme ;
- multiplier deux développements limités en multipliant les parties régulières et en tronquant au plus petit des deux ordres.

Exemples.

- Calculons le $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto x\cos x - \sin x$:
$$x\cos x - \sin x = x - \frac{x^3}{2} - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = -\frac{x^3}{3} + o(x^3).$$
On notera que $f(0) = 0$, ce qui est cohérent avec ce qui a été obtenu puisque le terme constant dans le DL est nul.
- Calculons le $DL_3(0)$ de $g : x \mapsto \cos x \sin x$:
$$\cos x \sin x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$
Là aussi $g(0) = 0$, et le terme constant dans le DL est bien nul.
- Calculons le $DL_3(0)$ de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{e^x}{1-x}$.
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$
D'où par produit :
$$h(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right),$$
ce qui donne, en développant et en simplifiant :
$$\begin{aligned} h(x) &= 1 + (x + x) + \left(\frac{x^2}{2} + x^2 + x^2\right) + o(x^3) \\ &= 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$
On notera qu'on a $h(0) = 1$ qui est bien le terme constant du DL.

Propriété 36

Supposons que f admette un développement limité à l'ordre n en a de partie régulière non nulle :
$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$
Alors en notant p le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$, on a : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p$

Remarque. On retrouve les équivalents usuels à partir des DL.
Par exemple on a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, soit encore $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Ainsi $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.
On a $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$, et donc $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$.

Exemple.
D'après les calculs effectués précédemment, on a donc les équivalents suivants :

$$x\cos(x) - \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{3} \quad , \quad \cos(x)\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \text{et} \quad \frac{e^x}{1-x} \underset{x\to 0}{\sim} 1.$$

Exemple.
Étudions la limite en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{3\sin x - x\cos x - 2x}{\sin^5 x}$.
On sait que :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

On en déduit :

$$3\sin x - x\cos x - 2x \sim -\frac{1}{60}x^5 \quad \text{et} \quad \sin^5 x \sim x^5,$$

puis :

$$\frac{3\sin x - x\cos x - 2x}{\sin^5 x} \sim -\frac{\frac{1}{60}x^5}{x^5} \sim -\frac{1}{60}$$

ce qui nous donne que la limite cherchée vaut $-\frac{1}{60}$.

Exemple.
Déterminons la limite en 1 de $x \mapsto \frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2}$.
On se ramène en 0 en posant $t = x - 1$ et on cherche un équivalent du numérateur :

$$\ln(1+t) - t = \left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) - t = -\frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Il en résulte que $\ln(1+t) \underset{0}{\sim} -t^2/2$, et donc que $\ln(x) - x + 1 \underset{1}{\sim} -(x-1)^2/2$. Ainsi on a

$$\frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2} \underset{1}{\sim} \frac{-(x-1)^2}{2(x-1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2}$ existe bien et vaut $-\frac{1}{2}$.

2.12 Fonctions convexes

Définition.

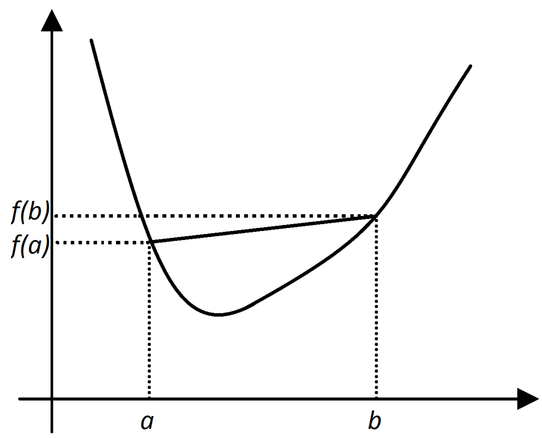
On dit qu'une fonction f est *convexe* sur un intervalle I si :

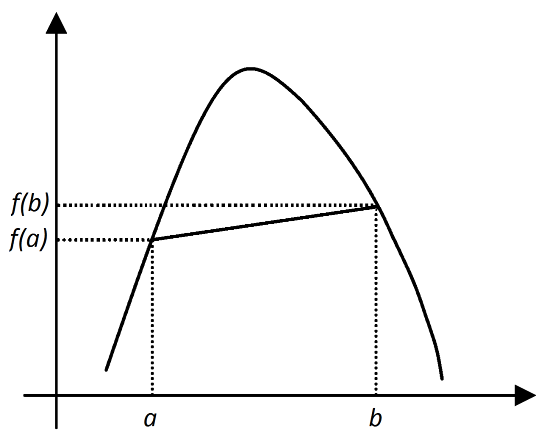
$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

On dit que f est *concave* sur I si $-f$ est convexe sur I, c'est à dire si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Interprétation graphique.





f est **convexe** : pour tout $(a,b) \in I^2$, l'image de tout point du segment $[a,b]$ est **en dessous de la corde** passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

f est **concave** : pour tout $(a,b) \in I^2$, l'image de tout point du segment $[a,b]$ est **au dessus de la corde** passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Propriété 37

On suppose que f est convexe sur I. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in I^n, \quad \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0,1]^n,$$

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1 \quad \Rightarrow \quad f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Théorème 38 (CNS de convexité pour une fonction $\mathscr{C}^1$)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

$$\begin{aligned} f \text{ est convexe sur } I &\Leftrightarrow f \text{ est au dessus de ses tangentes sur } I \\ &\Leftrightarrow f' \text{ est croissante sur } I \end{aligned}$$

Théorème 39 (CNS de convexité pour une fonction $\mathscr{C}^2$)

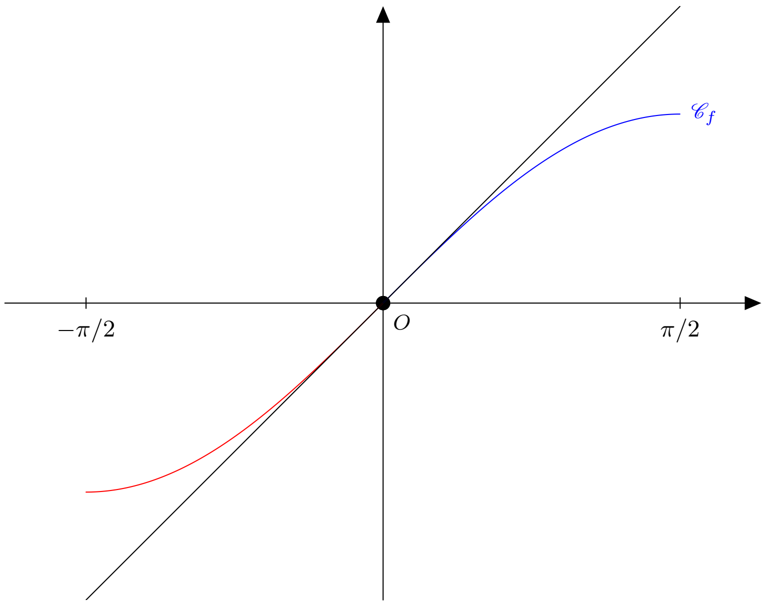
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.

$$f \text{ est convexe} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ f''(x) \geq 0$$

Exemple.
Étudions la convexité de la fonction sinus sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^2$ sur cet intervalle, et on a :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (\sin)''(x) = -\sin(x).$$

Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $-\sin(x) \leq 0$. La fonction sin est donc concave sur cet intervalle. Et elle est convexe sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ puisque $-\sin(x) \geq 0$ sur cet intervalle.



La courbe représentative du sinus change de concavité en O :
elle est convexe sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ (arc représenté en rouge) et concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (arc en bleu).

Définition.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et $a \in I$. On dit que $(a, f(a))$ est un *point d'inflexion* de la courbe représentative de f si f'' s'annule au point a en changeant de signe.

Remarque. Graphiquement, un point d'inflexion $A = (a, f(a))$ correspond à un point où la courbe représentative de f change de concavité. Supposons par exemple que $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a-\varepsilon, a]$ et $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, a+\varepsilon]$. Sur $[a-\varepsilon, a]$, f est donc concave et l'arc de courbe correspondant est en dessous de la tangente en A. Et c'est l'inverse sur $[a, a+\varepsilon]$, l'arc de courbe correspondant est au dessus de la tangente en A. On retiendra donc qu'en un point d'inflexion A, la courbe de f traverse sa tangente.

Exemple.
Montrons les inégalités suivantes :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x.$$

Posons $f(x) = \sin(x)$. On a établi que f est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Sa courbe représentative est donc au dessus de toutes ses cordes, et en dessous de toutes ses tangentes. Or la tangente en 0 a pour équation :

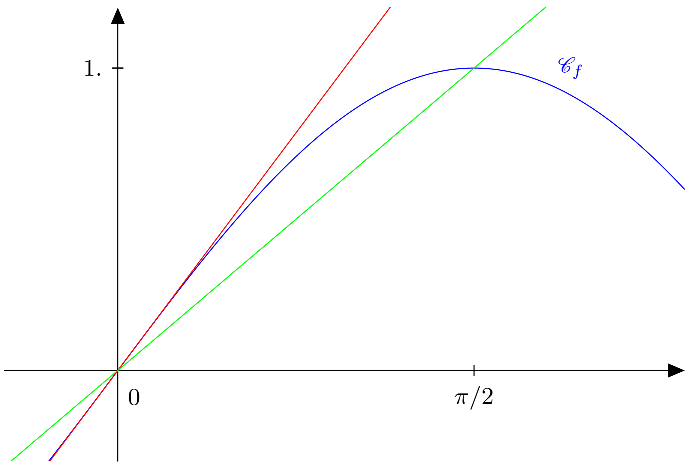
$$y = f(0) + f'(0)(x-0) = x$$

et la corde entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ a pour équation :

$$y = \frac{f(\pi/2) - f(0)}{\pi/2 - 0}(x-0) + f(0) = \frac{1-0}{\frac{\pi}{2} - 0}(x-0) + 0 = \frac{2}{\pi}x.$$

D'où les inégalités demandées :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x.$$



La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ du sinus est en dessous de sa tangente en 0 (en rouge) et au dessus de sa corde entre 0 et $\pi/2$ (en vert).

3 Polynômes

Compétences attendues.

- ✓ Connaitre les règles de calcul du degré d'une expression.
- ✓ Savoir le théorème de division euclidienne, et obtenir le quotient et le reste en pratique.
- ✓ Savoir déterminer l'ordre de multiplicité d'une racine.
- ✓ Factoriser un polynôme (recherche de racines évidentes et de leurs multiplicités, puis division euclidienne pour mettre en facteurs).

Dans toute cette section, $\mathbb{K}$ désignera l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ ou l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$.

3.1 Définition et premières propriétés

Définition.

On dit qu'une fonction $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est une *fonction polynomiale* ou un *polynôme à coefficients dans* $\mathbb{K}$ s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Propriété 40 (Opérations sur les polynômes)

La somme, le produit, la composée de deux polynômes sont des polynômes.

Remarque. Si $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q : x \mapsto \sum_{k=0}^{p} b_k x^k$, alors :

$$(PQ) : x \mapsto \sum_{k=0}^{p+q} c_k x^k \quad \text{avec} \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Notations. Notons X la fonction polynomiale $x \mapsto x$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X^k désigne alors la fonction polynomiale $x \mapsto x^k$. Le polynôme $P : x \mapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ se note donc plus simplement :

$$P = P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + a_n X^n$$

avec la convention $a_0 X^0 = a_0$. On dit que P est un *polynôme d'indéterminée* X et on note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On notera $0_{\mathbb{K}[X]}$ le polynôme $x \mapsto 0$, appelé *polynôme nul*.

Propriété 41 (Unicité de l'écriture d'un polynôme)

- Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme. Alors on a :

$$P = 0_{\mathbb{K}[X]} \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

- Tout polynôme $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ s'écrit de manière unique $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$. La suite $(a_n)_{n \in [\![0,n]\!]}$ est appelée *suite des coefficients de* P.

Définition.

On appelle *dérivée (formelle)* d'un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$ le polynôme noté P', tel que :

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k p_k X^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) p_{i+1} X^i.$$

Remarque. Lorsque le polynôme est à coefficients réels, la dérivée formelle est celle des fonctions numériques de la variable réelle. On étend ces règles pour définir formellement, quel que soit l'ensemble $\mathbb{K}$ (et donc pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ également), la notion de polynôme dérivé. On montre alors que les propriétés et règles de calcul de la dérivation formelle sont les mêmes que pour la dérivation usuelle.

3.2 Degré d'un polynôme

Définition.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme non nul.

- On appelle *degré* de P, et on note $\deg(P)$, le plus grand entier N tel que $a_N \neq 0$.
- Le coefficient a_N est alors appelé le *coefficient dominant* de P. Si $a_N = 1$, on dit que P est un *polynôme unitaire*.

On conviendra que le polynôme nul est de degré $-\infty$.

Propriété 42 (du degré d'un polynôme)

Soient P et Q deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

- En général, $\deg(P+Q) \leq max(\deg(P), \deg(Q))$.
  Et si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- $\deg(\lambda.P) = \deg(P)$
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
- Si $\deg(Q) \geq 1$, $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.
- Si $\deg(P) \geq 1$, $\deg(P') = \deg(P) - 1$. Si P est constant, $P' = 0$.

Notation. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus n est noté $\mathbb{K}_n[X]$.

3.3 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Définition.

Soient A, B deux polynômes. On dit que B *divise* A ou que A est un *multiple* de B et on note $B|A$ s'il existe un polynôme Q tel que: $A = BQ$.

Théorème 43 (*de la division euclidienne*)

Soient A, B deux polynômes tels que $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

Q et R sont appelés le *quotient* et le *reste* de la *division euclidienne* de A par B.

Remarque. Soient A, B deux polynômes, avec $B \neq 0$. Alors B divise A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Propriété 44 (Intégrité)

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On a :

$$P \times Q = 0_{\mathbb{K}[X]} \quad \Rightarrow \quad P = 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ ou } Q = 0_{\mathbb{K}[X]}.$$

3.4 Racines

Définition.

Soient P un polynôme et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une *racine* de P si $P(a) = 0$.

Propriété 45 (Caractérisation d'une racine)

Soient P un polynôme de degré n et $a \in \mathbb{K}$. Alors :

$$a \text{ est une racine de } P \quad \Leftrightarrow \quad (x - a) \text{ divise } P.$$

Théorème 46 (Nombre de racines distinctes)

- Tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes.
- Un polynôme de degré n admettant au moins $n+1$ racines distinctes est le polynôme nul.

Théorème 47 (Ordre de multiplicité d'une racine)

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On a l'équivalence entre :

(1) $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$, $P = (X-a)^r Q$ et $Q(a) \neq 0$

(2) $(X-a)^r$ divise P et $(X-a)^{r+1}$ ne divise pas P ;

(3) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(r-1)}(a) = 0$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$.

Si l'une de ces conditions est satisfaite, on dit alors que *a est racine de P de multiplicité r exactement*.

Remarque. Soit P un polynômes **à coefficients réels** (ce qui suit est faux pour des coefficients complexes). Si $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ est racine de P de multiplicité $r \geq 1$, alors $\overline{z}$ est aussi racine de P de multiplicité r.

En effet, si z est racine de P de multiplicité r, alors

$$P(z) = P'(z) = \cdots = P^{(r-1)}(z) = 0 \text{ et } P^{(r)}(z) \neq 0.$$

En passant au conjugué, on obtient (puisque les polynômes $P^{(i)}$ sont à coefficients réels) :

$$P(\bar{z}) = P'(\bar{z}) = \cdots = P^{(r-1)}(\bar{z}) = 0 \text{ et } P^{(r)}(\bar{z}) \neq 0,$$

et donc $\bar{z}$ est racine de multiplicité r de P. En particulier, on en déduit que $(X-z)^r(X-\bar{z})^r = (X^2 - 2Re(z)X + |z|^2)^r$ divise P.

Théorème 48 (Nombre de racines comptées avec multiplicité)

- Tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines comptées avec leurs ordres de multiplicité.
- Un polynôme de degré n admettant au moins $n+1$ racines comptées avec leurs ordres de multiplicité est le polynôme nul.

Théorème 49 (*de d'Alembert-Gauss*)

- Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant (i.e. de degré supérieur ou égal à 1) admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
- Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ admet exactement n racines complexes (comptées avec leur multiplicité respective).

Mise en garde.

Ce n'est plus vrai dans $\mathbb{R}[X]$: le polynôme X^2+1 est de degré 2, mais n'a aucune racine dans $\mathbb{R}$. Il a cependant deux racines simples i et $-i$ dans $\mathbb{C}$.

Exemple.

Factorisons $P = X^5 - 7X^4 + 19X^3 - 25X^2 + 16X - 4$ dans $\mathbb{R}[X]$.

P est de degré ≥ 3, pas de forme remarquable, on n'a donc aucune chance de factoriser ce polynôme ... à moins de trouver une racine évidente ! On cherche si 0, 1, -1, 2 ou -2 sont racines de P. On remarque que c'est bien le cas pour 1. On cherche sa multiplicité :

$$P(1) = P'(1) = P''(1) = 0 \text{ et } P^{(3)}(1) = 6 \neq 0.$$

Donc 1 est racine de P de multiplicité 3 exactement.

On sait alors que $(X-1)^3$ divise le polynôme P, c'est à dire qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)^3 Q(X)$, avec $\deg(Q) = 2$ (en considérant les degrés). Si on souhaite obtenir le polynôme Q afin de factoriser P, on peut alors :

- soit poser $Q = aX^2 + bX + c$ et développer $P(X) = (X-1)^3 Q$. On obtient alors Q en identifiant les coefficients ;
- soit faire la division euclidienne de P par $(X-1)^3$. Le reste est alors nul, et le quotient est Q : c'est cette méthode qu'on privilégiera car elle est en général bien plus rapide.

Par division euclidienne, on obtient $P = (X-1)^3(X^2 - 4X + 4) = (X-1)^3(X-2)^2$.