Chapitre 10a

# Variables aléatoires à densité



**Compétences attendues.**

- ✓ Prouver qu'une variable aléatoire $X$ est à densité.
- ✓ Montrer qu'une fonction $f$ est une densité de probabilité.
- ✓ Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire $Y = g(X)$.
- ✓ Déterminer une densité d'une variable aléatoire $X$.
- ✓ Prouver l'existence et calculer une espérance ou une variance d'une variable à densité.
- ✓ Utiliser le théorème de transfert pour calculer une espérance.


Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en ECS2 au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

# 1 Généralités sur les variables aléatoires à densité

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.

## 1.1 Définition

**Rappels.**

- On appelle *fonction de répartition* d'une variable aléatoire réelle $X$ la fonction $F_X$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leq x).$$
- Une application $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle $X$ si et seulement si elle satisfait les points suivants :

  (i) $F$ est croissante sur $\mathbb{R}$ ;

  (ii) $F$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ ;

  (iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

  De plus, on a l'égalité :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F(x) - \lim_{t \to x^-} F(t).$$

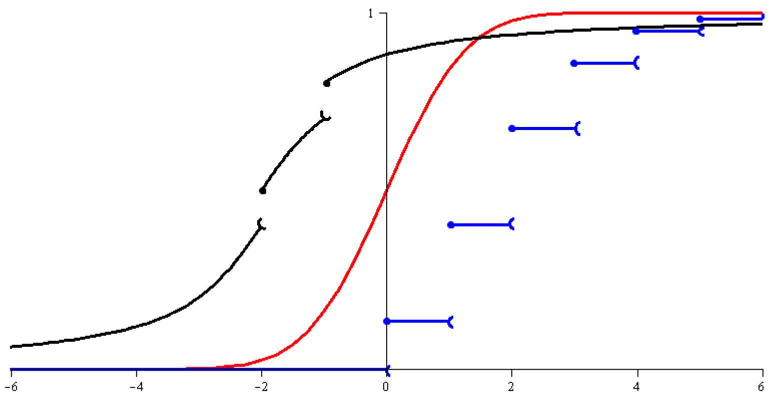
**Définition.**

Soit $X$ une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On dit que $X$ est une *variable aléatoire à densité* (ou *variable aléatoire continue*) si sa fonction de répartition $F_X$ est de plus :

(iv) continue sur $\mathbb{R}$ ;

(v) de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre **fini** de points.

**Remarque.** Les trois courbes suivantes sont celles de fonctions de répartition de variables aléatoires réelles.




- La courbe bleu est en escalier. C'est donc la fonction de répartition d'une variable discrète $X$. Rappelons qu'elle est discontinue à droite en tout point de son support $X(\Omega)$. En particulier, une variable discrète n'est donc pas à densité.
- La courbe rouge représente une fonction de répartition (celle de la loi normale $\mathscr{N}(0,1)$) de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. C'est donc la fonction de répartition d'une variable continue.

- La fonction représentée par la courbe noir est discontinue en certains points, et n'est pas en escalier. C'est la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui est ni discrète, ni continue. Cette année nous n'étudierons pas ce type de variables aléatoires, on se focalisera sur les cas discret et continue.

**Exercice.** On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.

1. Représenter graphiquement la fonction $F$.
2. Montrer qu'il existe une variable aléatoire $X$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de fonction de répartition $F$.

   *On dit qu'une telle variable aléatoire suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ et on note $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.*
3. Montrer que $X$ est une variable aléatoire continue.

## 1.2 Densité de probabilité

**Définition.**

Soit $X$ une variable aléatoire à densité.
On appelle *densité de probabilité de* $X$ toute fonction $f$ satisfaisant les deux points suivants :

(i) $f$ est positive sur $\mathbb{R}$ ;

(ii) $f(x) = F_X'(x)$ pour tout $x$ appartenant à $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

**Remarque.** Une densité d'une variable aléatoire n'est pas unique : si $f$ est une densité de $X$ et si l'on change la valeur de $f$ en un nombre fini de points (en prenant pour nouvelles valeurs des réels positifs) alors on obtient une autre densité de $f$. Ainsi on parlera pour $f$ d'**une** densité de $X$ et non de **la** densité de $X$.

**Exercice.** Soit $\lambda > 0$ et $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$. Déterminer une densité de $X$.

**Propriété 1** (Lien fonction de répartition/densité)

Soit $X$ une variable aléatoire à densité, et $f_X$ une densité de $X$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$ converge et on a :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Remarque.** La donnée d'une densité d'une variable aléatoire caractérise donc sa loi. En particulier si $X$ et $Y$ sont à densité de densités respectives $f_X$ et $f_Y$, elles ont même loi si et seulement si $f_X = f_Y$ sauf en un nombre fini de points.

**Propriété 2** (Lien probabilités/densité)

Soit $X$ une variable aléatoire à densité, et $f_X$ une densité de $X$. On a :

- $\forall a \in \mathbb{R},\ P(X = a) = 0.$
- $\forall a, b \in \mathbb{R},\ P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b).$
- $\forall a, b \in \mathbb{R},\ P(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_{a}^{b} f_X(t)\mathrm{d}t.$

**Preuve.** $F$ étant continue, on a pour tout $a \in \mathbb{R}$ :

$$P(X = a) = F(a) - \lim_{x \to a^-} F(x) = 0.$$

Ainsi pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $P(a \leq X \leq b) = P(X = a) + P(a < X \leq b) = P(a < X \leq b)$. On démontre de même les autres égalités. On a enfin :

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

**Mise en garde.**

Ainsi si $X$ est continue, $P(X = a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Ceci est bien évidemment **faux** lorsque $X$ est une variable aléatoire **discrète**.

**Propriété 3**

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. $f$ est une densité d'une variable aléatoire si et seulement si elle satisfait les points suivants :

- $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre **fini** de points ;
- $f$ est positive sur $\mathbb{R}$ ;
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

**Exercice.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = \dfrac{\lambda}{1 + t^2}$.

a) Déterminer la valeur de $\lambda$ pour que $f$ soit une densité d'une variable aléatoire $X$.

*On dit que $X$ suit une loi de Cauchy.*

b) Déterminer sa fonction de répartition $F_X$.

c) Tracer les courbes représentatives de $f$ et $F_X$ et représenter graphiquement les probabilités $P(-1 \leq X \leq 1)$ et $P(X \geq 1)$. Calculer ces probabilités. Que vaut $P(X \leq -1)$ ?

### 1.3 Variable aléatoire fonction d'une variable aléatoire à densité

**Propriété 4**

Soit $X$ une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, et soit $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $g(X)$ est encore une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

**Exemple.** Si $X$ est une variable aléatoire réelle, alors $X^2$, $e^X$, $aX+b$, $\ldots$ sont des variables aléatoires réelles.

**Question.** Si $X$ est à densité, est ce que $g(X)$ est encore à densité ?

**Méthode.**

*Pour montrer que $Y = g(X)$ est à densité, on procède de la manière suivante :*

*(i) on détermine le support $Y(\Omega)$ à partir de celui de $X$, afin de trouver sans calcul à quels endroits $F_Y$ vaut 0 ou 1.*

*(ii) on déterminer la fonction de répartition $F_Y$ de $Y$ : on revient à la définition $F_Y(x) = P(Y \leq x)$, puis on transformera cette inégalité (en prenant bien garde au sens des inégalités) pour l'exprimer en fonction de $X$.*

*(iii) Une fois $F_Y$ obtenue en fonction de $F_X$, on étudie sa continuité sur $\mathbb{R}$ et son caractère $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement d'un nombre fini de points.*

*(iv) On dérive $F_Y$ aux points où c'est possible pour obtenir une densité de $Y$. On prendra des valeurs arbitraires (positives) aux points où $F_Y$ n'est pas dérivable.*

**Exercice. Densité de $aX + b$.**
Soit $X$ une variable aléatoire à densité, et $f_X$ une densité de $X$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, on pose $Y = aX + b$.

a) Montrer que $Y$ est une variable à densité, puis en déterminer une densité en fonction de $f_X$.

b) Supposons que $X \hookrightarrow \mathscr{E}(2)$. Déterminer une densité de probabilité de $Y = -2X + 3$.

**Exercice.** Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy.

a) Montrer que $Z = e^X$ est une variable à densité, puis en déterminer une densité.

b) Même question pour $T = X^2$.

# 2 Moments d'une variable aléatoire à densité

## 2.1 Espérance

**Définition.**

Soit $X$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, $f$ une densité de $X$.
On dit que $X$ *admet une espérance* lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.
Dans ce cas, on appelle *espérance de* $X$ et on note $E(X)$ le réel défini par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Remarque.** En fait, puisque $t \mapsto tf(t)$ est de signe constant sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$, cette intégrale est absolument convergente si et seulement si elle est convergente.

**Exercice.** Déterminer l'espérance de $X$, si elle existe, dans les cas suivants :

a) $X$ suit une loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$ ;

b) $X$ suit une loi de Cauchy.

**Propriété 5** (Linéarité de l'espérance)

Soit $X$ et $Y$ des variables aléatoires à densité admettant une espérance. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et on a :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

**Propriété 6** (Existence de l'espérance par domination)

Soient $X, Y$ deux variables aléatoires à densité admettant une espérance et telles que $0 \leq |X| \leq Y$ presque sûrement. Alors $X$ admet une espérance et $|E(X)| \leq E(Y)$.

**Propriété 7** (Variables bornées et espérance)

Soit $X$ une variable aléatoire à densité.
Si $X$ est presque surement bornée, c'est-à-dire s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P(a \leq X \leq b) = 1$, alors $X$ admet une espérance.

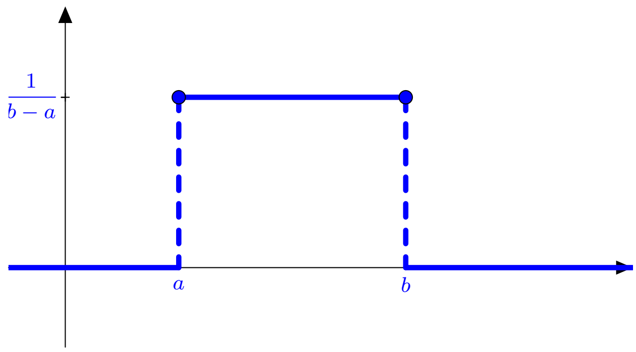
**Preuve.**

□

**Exemple.** Une variable $X$ suit une loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$ si elle admet pour densité la fonction :

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a $f(t) = 0$ pour tout $t \notin [a,b]$, donc $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. $X$ est donc bornée presque surement et admet une espérance.




*Densité de la loi uniforme sur* $[a,b]$.

**Propriété 8**

Soient $X$, $Y$ des variables aléatoires à densité admettant une espérance.

- *Positivité de l'espérance :* si $X \geq 0$ presque sûrement, alors $E(X) \geq 0$.
- *Croissance de l'espérance :* si $X \leq Y$ presque sûrement, alors $E(X) \leq E(Y)$.

## 2.2 Théorème de transfert

**Théorème 9** (*de transfert*)

Soit $X$ une variable aléatoire admettant une densité $f_X$ nulle en dehors de $]a,b[$ ($a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), et soit $\varphi : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points.

$E(\varphi(X))$ existe si et seulement si $\int_a^b \varphi(x) f_X(x) \mathrm{d}x$ converge **absolument**. Et en cas de convergence absolue, on a :

$$E(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(x) f_X(x) \mathrm{d}x.$$

**Preuve.** Je vous renvoie au **Complément 4. Preuve du théorème de transfert**. □

**Corollaire 10**

Si $X$ est une variable aléatoire à densité admettant une espérance, alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, la variable $aX + b$ admet une espérance et on a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

**Preuve.** Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = ax + b$. $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$|\varphi(x) f_X(x)| = |a x f_X(x) + b f_X(x)| \leq |a||x f_X(x)| + |b||f_X(x)| \text{ par inégalité triangulaire.}$$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x$ converge absolument car $X$ admet une espérance, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \mathrm{d}x$ converge (absolument). Par théorème de comparaison, on en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x) \mathrm{d}x$ converge absolument.

Par le théorème de transfert, $E(aX+b)$ existe donc bien, et on a :

$$E(aX+b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax+b) f_X(x)\mathrm{d}x \overset{\text{tout converge}}{=} a\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x + b\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = aE(X)+b.$$

□

**Exercice.** Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$.

a) La variable aléatoire $Y = e^X$ admet-elle une espérance ?

b) Montrer que $Z = X^2$ admet une espérance qu'on calculera.

## 2.3 Moments d'ordre supérieur, variance

**Définition.**

Soit $X$ une variable aléatoire à densité, $f_X$ une densité de $X$, et $r \in \mathbb{N}^*$.
On dit que $X$ *admet un moment d'ordre* $r$ si $X^r$ admet une espérance. Par le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{converge absolument.}$$

Dans ce cas, on note $m_r(X) = E(X^r)$.

**Propriété 11**

Soit $X$ une variable aléatoire à densité, et soit $q, r \in \mathbb{N}^*$ tels que $q \leq r$.
Si $X$ admet un moment d'ordre $r$, alors $X$ admet un moment d'ordre $q$.

**Preuve.** La preuve est semblable au cas où $X$ est discrète, et laissée en exercice. □

**Remarque.** Si une variable à densité $X$ admet un moment d'ordre 2, alors $X$ admet une espérance.

**Définition.**

Soit $X$ une variable aléatoire à densité admettant une espérance, et $f$ une densité de $X$.
On dit que $X$ *admet une variance* si $(X - E(X))^2$ admet une espérance. D'après le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{converge } \textbf{absolument}.$$

Dans ce cas, la *variance de* $X$, notée $V(X)$, est :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Propriété 12**

Si $X$ est une variable aléatoire à densité admettant une variance, alors $V(X) > 0$.

On appelle *écart-type de* $X$, et on note $\sigma(X)$, le réel défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

**Preuve.** La fonction $g : x \mapsto (x - E(X))^2 f(x)$ est positive sur $\mathbb{R}$, donc son intégrale est positive ou nulle. Ainsi on a déjà $V(X) \geq 0$.

Si $V(X) = 0$, alors $g$ est nulle en tous les points de continuité de $f$. Or puisque $(x - E(X))^2$ s'annule uniquement pour $x = E(X)$, cela signifie que $f = 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Cela impliquerait en particulier que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0$, ce qui est faux puisque cette intégrale vaut 1.
Ainsi on a bien $V(X) > 0$. □

**Propriété 13**

Soit $X$ une variable aléatoire à densité admettant une variance, et soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $aX + b$ admet une variance et on a :

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

**Propriété 14** (*Formule de Huygens*)

Soit $X$ une variable aléatoire à densité admettant une espérance.

Alors $X$ admet une variance si et seulement si $X$ admet un moment d'ordre deux. Lorsque c'est le cas, on a alors :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

**Preuve.** La preuve est semblable au cas où $X$ est discrète, et laissée en exercice. □

**Exercice.** On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x^3} \text{ si } x > 1 \end{cases}$.

1. Montrer que $f$ est une densité de probabilité.
   On note $X$ une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densité $f$.
2. Déterminer l'espérance de $X$ si elle existe.
3. $X$ admet-elle une variance ?

**Définition.**

Soit $X$ une variable aléatoire à densité.

- $X$ est dite *centrée* si $X$ admet une espérance et si $E(X) = 0$.
- $X$ est dite *centrée réduite* si $X$ admet une variance et $E(X) = 0, V(X) = 1$.

**Propriété 15**

Soit $X$ une variable aléatoire à densité admettant une variance. Alors on a :

- $X - E(X)$ est centrée ;
- $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite. On l'appelle *la variable aléatoire centrée réduite associée à* $X$.