Chapitre 10b

Lois à densité usuelles

1	**Loi uniforme**	**2**
2	**Loi exponentielle**	**3**
3	**Loi normale**	**4**
4	**Loi gamma**	**7**
5	**Simulation en Scilab**	**8**
6	**Tableau récapitulatif**	**8**

Compétences attendues.

✓ Connaitre une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance des lois usuelles.

✓ Savoir utiliser la table de valeurs de la loi normale centrée réduite.

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en ECS2 au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Loi uniforme

Définition.

On dit qu'une variable aléatoire X suit *la loi uniforme sur un intervalle* $[a,b]$ (avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $a<b$) si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad f(t)=\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{si } a\leq t\leq b\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

On note alors $X\hookrightarrow\mathscr{U}([a,b])$.

Remarque. Les fonctions $\dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b[}$, $\dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{]a,b]}$ et $\dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{]a,b[}$ sont aussi des densités de $X\hookrightarrow\mathscr{U}([a,b])$.

Propriété 1

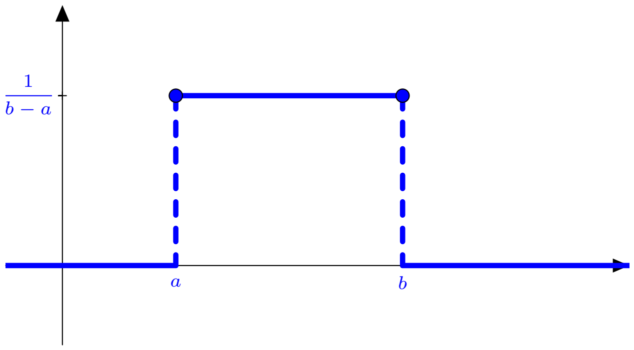
Soit X une variable de loi uniforme sur $[a,b]$. La fonction de répartition de X est :

$$F:x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a\leq x\leq b\\ 1 & \text{si} \quad b<x\end{cases}.$$

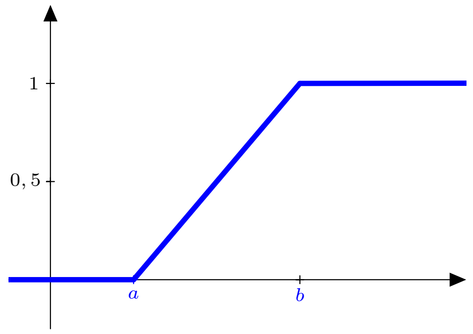
De plus, X admet une espérance et une variance et on a :

$$E(X)=\frac{a+b}{2}\qquad\text{et}\qquad V(X)=\frac{(a-b)^2}{12}.$$

Représentations graphiques.



Densité de la loi uniforme sur $[a,b]$.



Fonction de répartition de la loi uniforme sur $[a,b]$.

Cas particulier. Si $X\hookrightarrow\mathscr{U}([0,1])$, alors X admet pour densité :

$$f:t\mapsto\mathbb{1}_{[0,1]}(t)=\begin{cases}1 & \text{si } 0\leq t\leq 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

et pour fonction de répartition :

$$F:x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<0\\ x & \text{si} \quad 0\leq x\leq 1\\ 1 & \text{si} \quad x>1\end{cases}.$$

De plus, on a $E(X)=\dfrac{1}{2}$ et $V(X)=\dfrac{1}{12}$.

Propriété 2

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. On a :

$$X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1]) \quad \Leftrightarrow \quad Y = a + (b-a)X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b]).$$

2 Loi exponentielle

Définition.

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit *la loi exponentielle de paramètre* λ si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \lambda\, e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

Propriété 3

Si $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, alors sa fonction de répartition est donnée par :

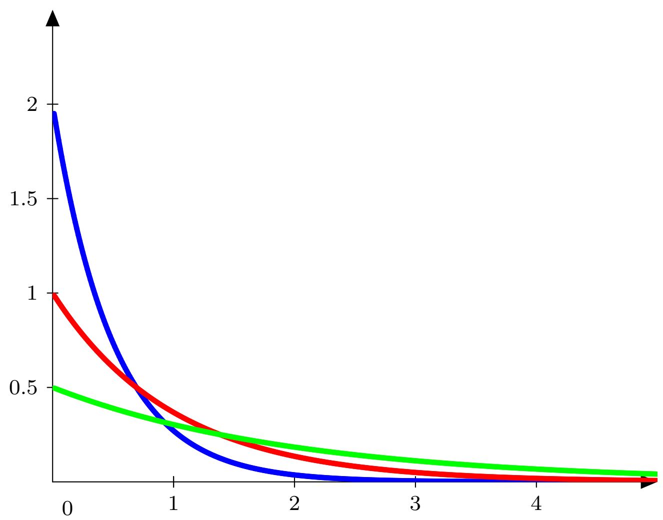
$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

De plus, X admet une espérance et une variance et on a :

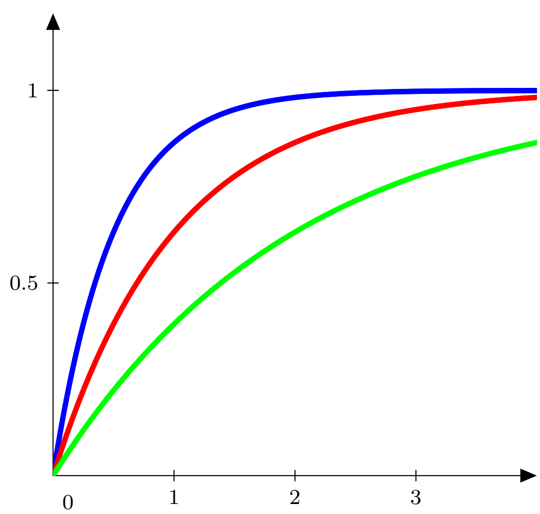
$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Représentations graphiques.

$\lambda =$ 2, 1, 0.5



Densité de la loi $\mathscr{E}(\lambda)$.



Fonction de répartition de la loi $\mathscr{E}(\lambda)$.

Propriété 4

Soit $\lambda > 0$. On a :

$$X \hookrightarrow \mathscr{E}(1) \quad \Leftrightarrow \quad Y = \frac{1}{\lambda} X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda).$$

3 Loi normale

Définition.

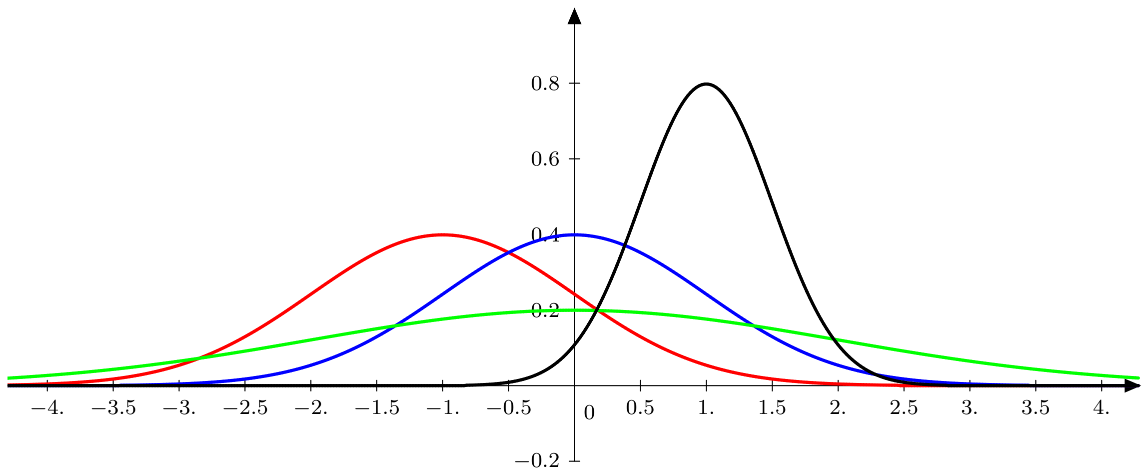
Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit *la loi normale de paramètres* (μ, σ^2) si elle admet pour densité la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Représentations graphiques.

$(\mu, \sigma) = (0,1), (0,2), (-1,1), (1,1/2)$



Densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Le saviez vous ?

Plusieurs mathématiciens peuvent revendiquer la découverte de la loi normale. En 1733, Abraham de Moivre est le premier à faire apparaître la loi normale comme loi limite d'une loi binomiale. Plus tard en 1777, Pierre-Simon de Laplace reprend les travaux de de Moivre et généralise son théorème limite à l'aide de la fonction Gamma d'Euler. Il obtient cette même loi, mais en tant qu'approximation de la loi binomiale. Peu de temps après, en 1810, c'est Carl Friedrich Gauss qui l'obtient à son tour en cherchant à minimiser l'erreur de trajectoire d'un objet céleste.

Dans le courant du XIX^e siècle, différents noms sont attribués à cette loi, comme *courbe des possibles*, *loi de fréquence des erreurs*, *loi de Gauss* chez les allemands ou les anglo-saxons, ou encore *loi de Laplace* en France. Françis Galton (1877) parle lui de *courbe de forme parfaitement normale.* Le dernier mot revient finalement à Henri Poincaré en 1893 devant ses étudiants : « *Je dirai, pour abréger, que la loi de probabilité est normale, lorsque la valeur de la probabilité est représentée par cette intégrale* ».

L'adjectif « normal » vient du fait que c'est la loi la plus couramment rencontrée dans la nature (nous l'expliquerons dans un prochain chapitre). Cette dénomination a aussi l'avantage de ne pas fixer la paternité de cette loi, qui est sujette à controverses.

Propriété 5

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. X admet une espérance et une variance et on a :

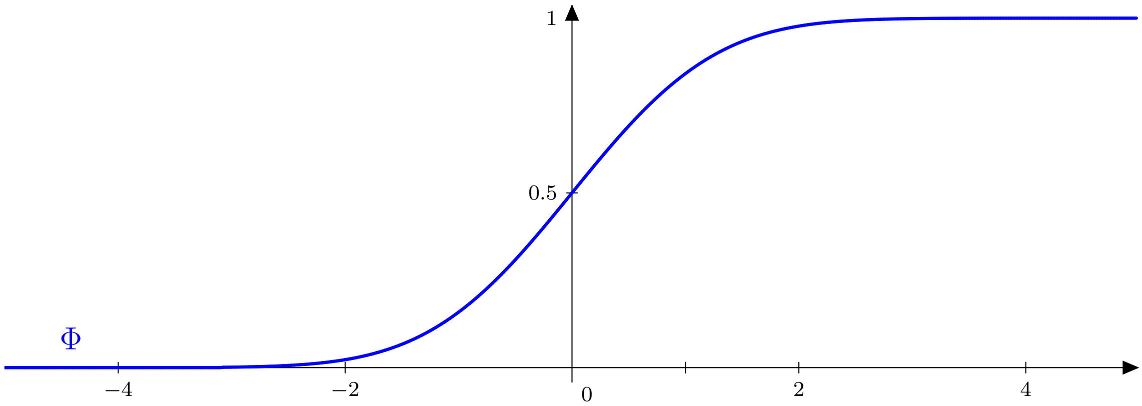
$$E(X) = \mu \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2.$$

Définition.

On note $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de répartition de X, c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

Représentation graphique.

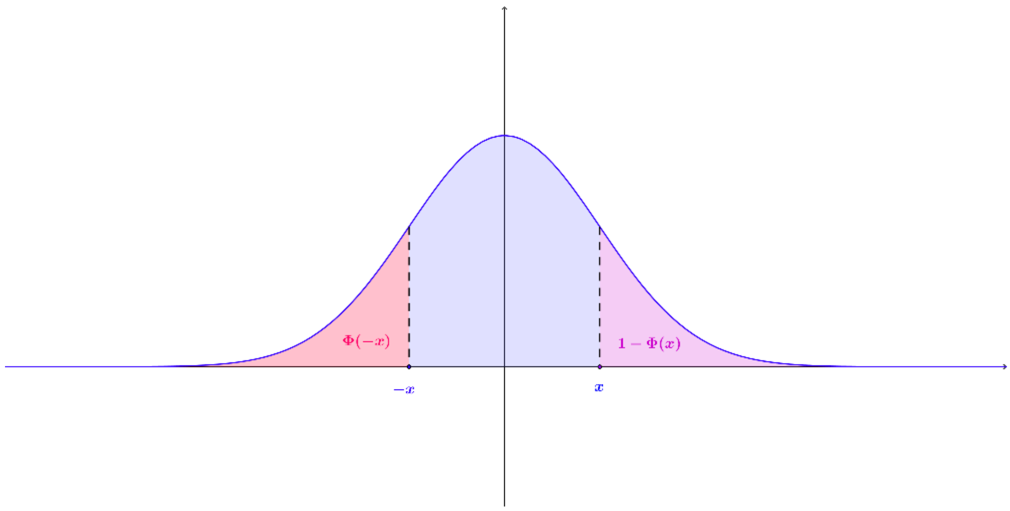


Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Propriété 6

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. En particulier $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.

Illustration graphique.



Preuve.

□

Remarque. On ne sait pas exprimer Φ à l'aide de fonctions usuelles (résultat difficile prouvé par Liouville vers 1840). Pour des calculs numériques, on utilise la table de valeurs de la loi normale centrée réduite fournie en fin de chapitre.

Exercice. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Déterminer une valeur approchée de $P(2 \leq X \leq 3)$ et de $P(-3 \leq X \leq 1)$.

Propriété 7

Si $X \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$, alors pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, on a :

$$aX + b \hookrightarrow \mathscr{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

En particulier, on a :

$$X \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathscr{N}(0, 1).$$

Preuve.

$\square$

Remarque. Si $X \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$, il suffit de se rappeler que $aX + b$ suit une loi normale, car on retrouve alors les paramètres en calculant :

$$E(aX + b) = aE(X) + b = a\mu + b \quad \text{et} \quad V(aX + b) = a^2V(X) = a^2\sigma^2.$$

Exercice.

a) Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$. Exprimer la fonction de répartition de X en fonction de Φ, μ et σ.

b) Application. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(3, \frac{1}{4})$. Donner une valeur approchée de $P(2 \leq X \leq 4)$ et de $P(X \geq 0)$.

4 Loi gamma

Rappel. On définit la *fonction Gamma d'Euler*, notée Γ, sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall \nu \in]0,+\infty[, \quad \Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} t^{\nu-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Définition.

Soit $\nu > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit *la loi gamma de paramètre* ν si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1}e^{-t} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

On note alors $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$.

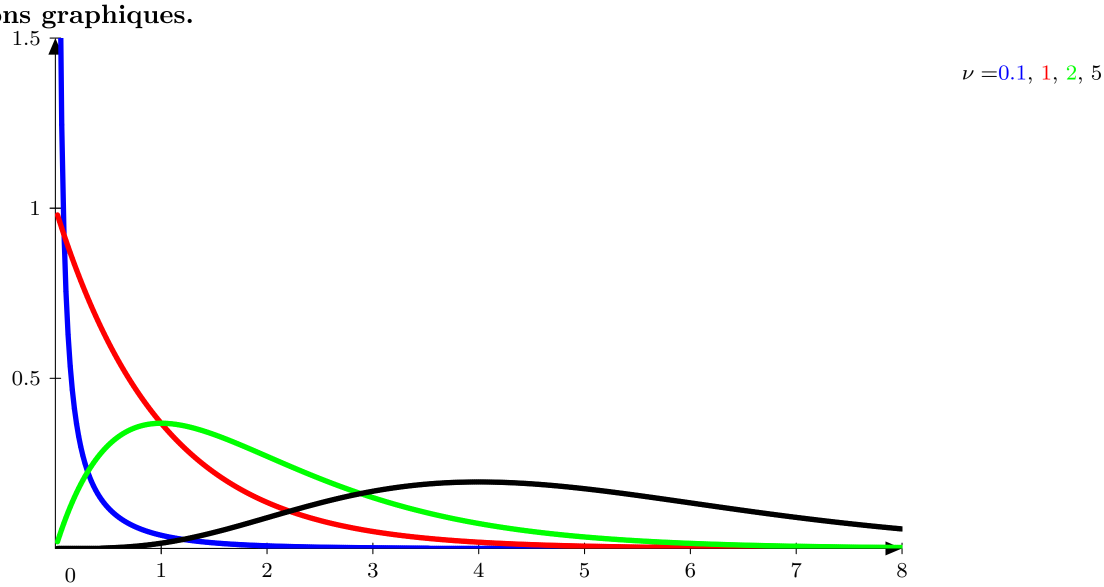
Remarque. Vérifions que f est bien une densité de probabilité.

Remarque. Plus généralement, si f est une fonction :

- continue sauf éventuellement en un nombre fini de points,
- positive,
- telle que $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et est strictement positive,

alors $g = \dfrac{1}{I} f$ est une densité de probabilité.

Représentations graphiques.



Densité de la loi Gamma $\gamma(\nu)$.

Remarques.

- Puisque $\Gamma(1) = 1$, la loi $\gamma(1)$ n'est autre que la loi $\mathscr{E}(1)$.
- La densité d'une loi $\gamma(\nu)$ est bornée si et seulement si $\nu \geq 1$.

Propriété 8

Soit $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$. Alors X admet une espérance et une variance et on a :

$$E(X) = \nu \quad \text{et} \quad V(X) = \nu.$$

Preuve.

□

5 Simulation en Scilab

La commande `grand` permet également de simuler des variables à densité, et `SciLab` connaît toutes les lois à densité que nous venons d'étudier. On utilisera pour cela :

- `grand(n,p,'unf',a,b)` pour simuler une loi uniforme sur [a,b][1].

  Il est aussi possible d'utiliser la fonction `rand()` qui simule une loi uniforme sur $[0, 1]$. On peut alors simuler une loi uniforme sur $[a, b]$ en se souvenant que $Y = a + (b - a)\texttt{rand}()$ suit une loi uniforme sur $[a, b]$.
- `grand(n,p,'nor',` μ`,` σ`)` pour simuler une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ.
- `grand(n,p,'exp',`λ`)` pour simuler une loi exponentielle d'espérance $\dfrac{1}{\lambda}$.

  Attention, il faut entrer $\dfrac{1}{\lambda}$ comme paramètre pour une loi $\mathscr{E}(\lambda)$.
- `grand(n,p,'gam',`ν`,1)` pour simuler une loi γ d'espérance ν.

6 Tableau récapitulatif

[1] Attention à ne pas confondre les uniformes discrètes et à densité : `uin` (pour "uniform integer") pour les uniformes discrètes, et `unf` pour les uniformes à densité.

Lois à densité usuelles

Nom	Notation	Une densité	Fonction de répartition	Espérance	Variance
Loi uniforme sur $[a,b]$ $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$	$\mathscr{U}([a,b])$	$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Loi uniforme sur $[0,1]$	$\mathscr{U}([0,1])$	$x \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{12}$
Loi exponentielle de paramètre λ $\lambda \in]0,+\infty[$	$\mathscr{E}(\lambda)$	$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Loi exponentielle de paramètre 1 = Loi gamma de paramètre 1	$\mathscr{E}(1) = \gamma(1)$	$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	1	1
Loi normale centrée réduite	$\mathscr{N}(0,1)$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$	$\Phi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$	0	1
Loi normale (ou de Laplace-Gauss) $m \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in]0,+\infty[$	$\mathscr{N}(m,\sigma^2)$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	$x \mapsto \Phi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)$	m	σ^2
Loi gamma de paramètre ν $\nu \in]0,+\infty[$	$\gamma(\nu)$	$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$	$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} \displaystyle\int_0^x t^{\nu-1} e^{-t} \mathrm{d}t & \text{si } x > 0 \end{cases}$	ν	ν

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Cette table donne $\Phi(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$, où X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000