Chapitre 11

Produit scalaire et espace euclidien

Compétences attendues.

- ✓ Montrer qu'une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.
- ✓ Savoir reconnaitre et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
- ✓ Montrer que deux sous-espaces sont orthogonaux.
- ✓ Montrer qu'une famille de vecteurs est orthogonale ou orthonormale.
- ✓ Construire une base orthonormée à l'aide de l'algorithme de Gram-Schmidt.
- ✓ Calculer les coordonnées d'un vecteur et sa norme dans une base orthonormale.

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en ECS2 au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Produit scalaire et norme euclidienne

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1.1 Produit scalaire

Définition.

On appelle *produit scalaire sur* E toute forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ satisfaisant

- φ est *bilinéaire* : $\forall\, x, x', y, y' \in E,\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$$\varphi(\lambda x + \mu x', y) = \lambda\varphi(x, y) + \mu\varphi(x', y) \quad \text{et} \quad \varphi(x, \lambda y + \mu y') = \lambda\varphi(x, y) + \mu\varphi(x, y')$$
- φ est *symétrique* :
$$\forall\, x, y \in E, \quad \varphi(y, x) = \varphi(x, y)$$
- φ est *positive* :
$$\forall\, x \in E, \quad \varphi(x, x) \geq 0$$
- φ est *définie positive* :
$$\forall\, x \in E, \quad \varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$$

Notation. Dans ce cas, on note $\varphi(x, y) = \langle x, y\rangle$ (ou parfois $(x|y)$, ou tout simplement $x \cdot y$).

Remarques.

- Pour montrer la bilinéarité, on se contentera de prouver la linéarité par rapport à la première variable et la symétrie. En effet, on a alors directement la linéarité par rapport à la deuxième variable puisque pour tout $(x, y, y') \in E^3$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:
$$\varphi(x, \lambda y + \mu y') \underbrace{=}_{\text{symétrie}} \varphi(\lambda y + \mu y', x) \underbrace{=}_{\text{lin. } 1^{ere} \text{ var.}} \lambda\varphi(y, x) + \mu\varphi(y', x) \underbrace{=}_{\text{symétrie}} \lambda\varphi(x, y) + \mu\varphi(x, y').$$
- On montrera en détails le caractère défini positif, souvent le point non trivial. Noter que l'implication $x = 0_E \Rightarrow \varphi(x, x) = 0$ est immédiate, il est donc inutile de s'y attarder.

Exemples classiques.

- *Produit scalaire sur* $\mathbb{R}^2$. Pour tout $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose :
$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2.$$
- *Produit scalaire canonique sur* $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :
$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

- *Produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.* Pour tout $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\langle X, Y \rangle = {}^tX \times Y.$$

- *Produit scalaire sur $E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$.* Pour tout $(f,g) \in E^2$, on pose :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Exemple. L'ensemble des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant une variance est un espace vectoriel E, sur lequel Cov : $(X,Y) \mapsto \mathrm{Cov}(X,Y)$ est une forme bilinéaire symétrique et positive. Elle n'est cependant pas définie positive car :

$$\mathrm{Cov}(X,X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = 0 \text{ p.s.}$$

Ainsi X n'est pas nécessairement la variable aléatoire nulle, on a seulement $P(X \neq 0) = 0$.

Exercice. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ en posant pour tout $P, Q \in E$:

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i).$$

Définition.

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est appelé *espace préhilbertien réel*, et noté $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Si de plus E est de dimension finie, on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un *espace euclidien*.

Le saviez vous ?

Sans doute d'origine grecque, Euclide vivait à Alexandrie trois cents ans avant notre ère. Son ouvrage fondamental, intitulé *Les Éléments*, regroupe toutes les connaissances mathématiques de l'époque en géométrie et en théorie des nombres. Euclide classe les propositions dans un ordre logique et se focalise sur la réflexion mathématique en la dégageant de tout fondement métaphysique ou philosophique. Sa démarche est nouvelle puisqu'il justifie ses raisonnements rigoureusement en se basant sur des postulats. Son influence sur le développement de la logique et de la science occidentale est fondamentale.

Les Éléments forment probablement le recueil ayant rencontré le plus de succès au cours de l'Histoire : ce fut l'un des premiers livres imprimés (Venise, 1482) et ne fut très probablement précédé que par la Bible pour le nombre d'éditions publiées (largement plus de 1 000).

Des cinq postulats énoncés dans le livre I, le dernier, dont on déduit le postulat des parallèles :

« en un point extérieur à une droite, ne passe qu'une unique droite qui lui est parallèle »

a toujours semblé moins évident que les autres. Plusieurs mathématiciens soupçonnèrent qu'il pouvait être démontré à partir des autres postulats, mais toutes les tentatives pour ce faire échouèrent. Vers le milieu du XIX^e siècle, il fut démontré qu'une telle démonstration n'existe pas, que le cinquième postulat est indépendant des quatre autres et qu'il est possible de construire des géométries non euclidiennes cohérentes en prenant sa négation. On peut construire ainsi deux autres types de géométries :

- la *géométrie hyperbolique*, qui prend pour postulat que « par un point extérieur à une droite, on peut mener une infinité de droites qui lui sont parallèles » ;
- la *géométrie elliptique*, prenant pour postulat que « par un point extérieur à une droite, on ne peut mener aucune parallèle ».

1.2 Norme euclidienne

Définition.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On définit la *norme euclidienne* sur E par :

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

En particulier, on dira qu'un vecteur $x \in E$ est *unitaire* s'il vérifie $\|x\| = 1$.

Exemples.

- Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, on a : $\|(2,1)\| =$
- Dans $\mathscr{C}([0,1])$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$, on a :

  $\|\exp\| =$

Propriété 1

- $\forall x \in E$, $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Preuve.

$\square$

Remarque. Si $x \in E \setminus \{0_E\}$, alors $\dfrac{x}{\|x\|}$ est unitaire. On dit qu'on a *normalisé* le vecteur x.

Propriété 2 (Identités remarquables)

(1) $\forall\, x, y \in E, \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$.

(2) *Identité de polarisation.* $\forall\, x, y \in E,\ \langle x, y\rangle = \dfrac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$.

Preuve.

$\square$

1.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz et conséquences

Théorème 3 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel. On a :

$$\forall\, x, y \in E, \quad |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \,.\, \|y\| \,.$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Preuve. Fixons $x, y \in E$, et considérons la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \|tx - y\|^2 = t^2 \|x\|^2 - 2t\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \,.$$

On distingue les deux cas suivants :

- si $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 0$, alors $x = 0_E$ et l'inégalité de Cauchy-Schwartz s'écrit alors $0 \leq 0$ et est bien satisfaite.

- si $\|x\|^2 \neq 0$, la fonction f est polynomiale du second degré en t. Elle est de plus à valeurs positives puisque $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \|tx + y\|^2 \geq 0$. Elle admet donc au plus une racine, et son discriminant est négatif. Or on a :

$$\Delta = 4\left(\langle x, y\rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2\right) \leq 0.$$

  On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

On étudie maintenant le cas d'égalité. Supposons x et y colinéaires, i.e. $x = 0_E$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$. On a alors égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz : c'est évident si $x = 0_E$, et si $y = \lambda x$ car :

$$|\langle x, y\rangle| = |\lambda| \, \|x\|^2 \qquad \text{et} \qquad \|x\| \, \|y\| = |\lambda| \, \|x\|^2 .$$

Réciproquement, supposons qu'on ait l'égalité. Si $x = 0_E$, alors x et y sont liés (car $y = 0 \cdot x$). Si $x \neq 0_E$, l'égalité signifie, en reprenant nos calculs, que $\Delta = 0$. Ainsi f admet une racine double α et $\|\alpha x - y\| = 0$, d'où $y = \alpha x$. $\square$

Remarque. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

- dans $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique :

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

- dans $E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$:

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}\sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}.$$

Propriété 4

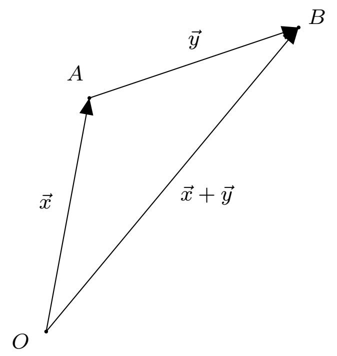
La norme euclidienne satisfait les trois propriétés suivantes :

(1) $\forall x \in E,\ \|x\| \geq 0 \quad$ et $\quad \|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0_E$;

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

(3) *Inégalité triangulaire.* $\forall x, y \in E,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Illustration graphique. L'inégalité triangulaire dans le plan donne l'inégalité entre distances $OB \leq OA + AB$.



Preuve.

$\square$

Propriété 5

- $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow x = 0_E$ ou $\exists\, \alpha \geq 0,\ y = \alpha \cdot x$.
- *Deuxième inégalité triangulaire.* $\forall\, x, y \in E,\ \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x+y\|$.

Preuve.

$\square$

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux

Définition.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On dit que les vecteurs $x, y \in E$ sont *orthogonaux* si $\langle x, y \rangle = 0$. On note parfois $x \perp y$.

Remarque. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, vous avez vu au lycée que le produit scalaire canonique de deux vecteurs non nuls x et y s'écrit sous la forme :

$$\langle x, y \rangle = \|x\|\, \|y\| \cos \widehat{(x, y)}$$

où $\widehat{(x, y)} \in [0, \pi]$ désigne l'angle non orienté entre les vecteurs x et y. On en déduit ainsi que :

$$x \perp y \quad \Leftrightarrow \quad x = 0_E \ \text{ ou } \ y = 0_E \ \text{ ou } \ \widehat{(x, y)} = \frac{\pi}{2}.$$

Exemples.

- Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, $(1, 0, 1)$ et $(-1, -5, 1)$ sont orthogonaux.

- Dans $\mathscr{C}([-\pi, \pi])$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t)\, \mathrm{d}t$, $f = \cos$ et $g = \sin$ sont orthogonaux.

Remarque. (À savoir refaire.) Soit $x \in E$. Si x est orthogonal à tout vecteur de E, alors $x = 0_E$, soit encore :

$$(\langle x, a \rangle = 0 \quad \forall a \in E) \quad \Rightarrow \quad x = 0_E.$$

Propriété 6 (*Théorème de Pythagore*)

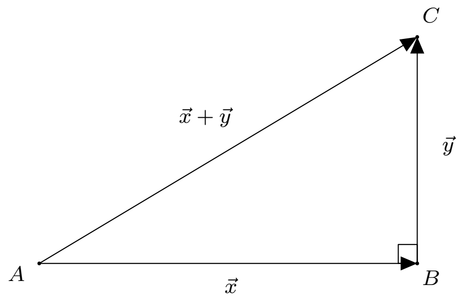
Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Alors :

$$x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux } \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Preuve.

□

Illustration graphique. On retrouve comme cas particulier le théorème de Pythagore dans le plan.



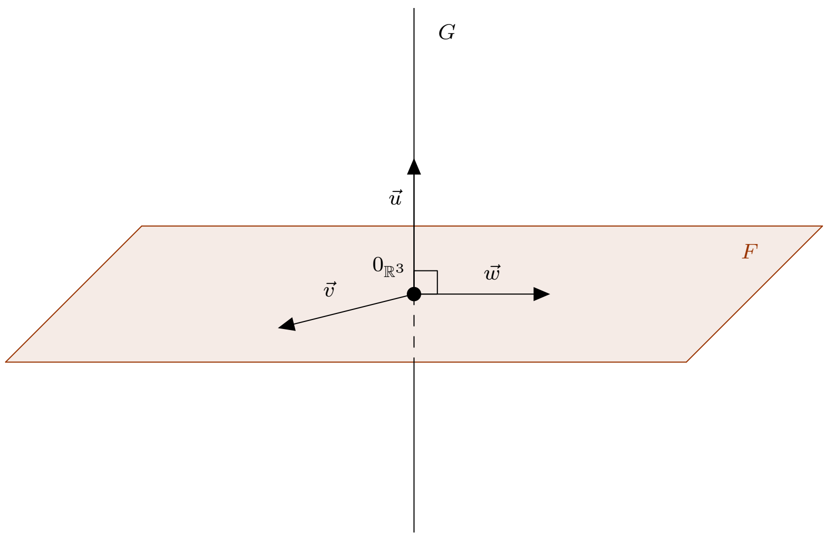
Définition.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont *orthogonaux* si on a :

$$\forall (x,y) \in F \times G, \quad \langle x, y\rangle = 0.$$

Autrement dit, F et G sont orthogonaux si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G. On note alors parfois $F \perp G$.

Exemple.



Deux sous-espaces orthogonaux de $\mathbb{R}^3$.

Propriété 7

On suppose que $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$ et $G = \mathrm{Vect}(y_1, \ldots, y_q)$. Alors on a :

$$F \perp G \quad \Leftrightarrow \quad \langle x_i, y_j \rangle = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, p\},\ \forall j \in \{1, \ldots, q\}.$$

Preuve.

□

Remarque. La droite vectorielle $G = \mathrm{Vect}(u)$ est orthogonale au plan vectoriel $F = \mathrm{Vect}(v, w)$ car $\langle u, v \rangle = 0$ et $\langle u, w \rangle = 0$.

Propriété 8

Si F et G sont orthogonaux, alors F et G sont en somme directe (i.e. $F \cap G = \{0_E\}$).

Preuve.

□

2.2 Familles orthogonales, familles orthonormales

Définition.

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

- On dit qu'une famille de vecteurs $(x_1, \ldots, x_k)$ de E est *orthogonale* si :

$$\forall\ 1 \leq i < j \leq k,\ \langle x_i, x_j \rangle = 0.$$

- Une famille orthogonale de vecteurs $(x_1, \cdots, x_k)$ de E est dite *orthonormale* si de plus :

$$\forall 1 \leq i \leq k, \quad \|x_i\| = \sqrt{\langle x_i, x_i \rangle} = 1.$$

Remarque.

- Une famille $(x_1, \cdots, x_k)$ est donc orthonormale si et seulement si on a :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, k\}^2, \quad \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Si $(x_1, \cdots, x_k)$ est une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul, alors $\left(\dfrac{x_1}{\|x_1\|}, \cdots, \dfrac{x_k}{\|x_k\|}\right)$ est une famille orthonormale.

Exercice. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, montrer que $((1,1,1),(1,1,-2),(1,-1,0))$ est une famille orthogonale. En déduire une famille orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Propriété 9 (Généralisation du théorème de Pythagore)

Si $(x_1,\ldots,x_k)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, alors on a :

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2 .$$

Preuve. Les propriétés du produit scalaire et l'orthogonalité des vecteurs $x_1,\ldots,x_k$ donnent :

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \langle x_i, x_j\rangle = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2 .$$

□

Remarque. La réciproque est vraie lorsque $k=2$, mais fausse en général lorsque $k \geq 3$.

Propriété 10

Toute famille orthogonale de vecteurs **non nuls** de E est libre. En particulier, toute famille orthonormale est libre.

Preuve.

□

2.3 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Propriété 11 (*Orthonormalisation de Gram-Schmidt*)

Soit $(x_1,\ldots,x_n)$ une famille libre de vecteurs de E. On définit par récurrence une famille $(e_1,\ldots,e_n)$ comme suit :

- on pose $e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$;
- une fois les vecteurs $e_1,\ldots,e_k$ construits,
  - on pose $v_{k+1} = x_{k+1} - \langle e_1, x_{k+1}\rangle e_1 - \cdots - \langle e_k, x_{k+1}\rangle e_k$;
  - on pose $e_{k+1} = \dfrac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$.

Alors :

- $(e_1,\ldots,e_n)$ est une famille orthonormée ;
- $\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k) = \mathrm{Vect}(x_1,\ldots,x_k)$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

Preuve. On montre par récurrence que pour tout $1 \leq j \leq n$, on a la propriété $\mathscr{P}(j)$ suivante : « $(e_1, \dots, e_j)$ est une famille orthonormée et $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_j)$ ».

Initialisation. Pour $j = 1$, on a bien $e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ de norme 1, donc (e_1) est une famille orthonormée, et $\mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}(x_1)$.

Hérédité. Soit $1 \leq j \leq n-1$. Supposons la propriété vraie au rang j. Montrons que $\mathscr{P}(j+1)$ est vraie.

On a par hypothèse de récurrence que $(e_1, \dots, e_j)$ famille orthonormale et que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_j)$. On pose alors :

$$v_{j+1} = x_{j+1} - \langle e_1, x_{j+1} \rangle e_1 - \cdots - \langle e_j, x_{j+1} \rangle e_j \quad \text{et} \quad e_{j+1} = \frac{v_{j+1}}{\|v_{j+1}\|}.$$

On a $e_1, \dots, e_j, e_{j+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_j, x_{j+1})$, donc $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j, e_{j+1}) \subset \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_j, x_{j+1})$.
Réciproquement, on a $x_1, \dots, x_j \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j, e_{j+1})$ et :

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= v_{j+1} + \langle e_1, x_{j+1} \rangle e_1 + \cdots + \langle e_j, x_{j+1} \rangle e_j \\ &= \|v_{j+1}\|\, e_{j+1} + \langle e_1, x_{j+1} \rangle e_1 + \cdots + \langle e_j, x_{j+1} \rangle e_j \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j, e_{j+1}) \end{aligned}$$

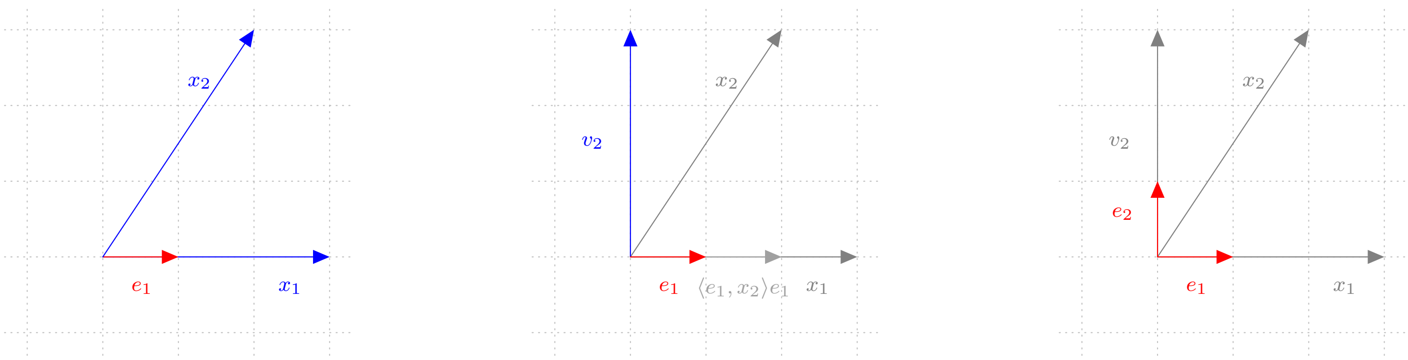
Ainsi on a bien $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j, e_{j+1})$.
Reste à montrer que la famille est orthonormale : on sait par hypothèse de récurrence que $(e_1, \dots, e_j)$ est orthonormale. De plus, e_{j+1} est de norme 1, et on a pour tout $1 \leq i \leq j$ que :

$$\begin{aligned} \langle v_{j+1}, e_i \rangle &= \langle x_{j+1} - \langle e_1, x_{j+1} \rangle e_1 - \cdots - \langle e_j, x_{j+1} \rangle e_j, e_i \rangle \\ &= \langle x_{j+1}, e_i \rangle - \langle \langle e_i, x_{j+1} \rangle e_i, e_i \rangle = \langle x_{j+1}, e_i \rangle - \langle e_i, x_{j+1} \rangle \langle e_i, e_i \rangle \\ &= \langle x_{j+1}, e_i \rangle - \langle e_i, x_{j+1} \rangle = 0. \end{aligned}$$

D'où $\langle e_{j+1}, e_i \rangle = 0$ pour tout $1 \leq i \leq j$. La famille $(e_1, \dots, e_{j+1})$ est donc orthonormale. La propriété $\mathscr{P}(j+1)$ est donc vraie.

On conclut par principe de récurrence. $\square$

Illustration graphique. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt dans le plan.



Étape 1 : Normalisation de x_1 en e_1. *Étape 2 : « Redressement » de x_2 en v_2.* *Étape 3 : Normalisation de v_2 en e_2.*

Orthonormalisation de Gram-Schmidt de la famille (x_1, x_2).

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt consiste donc à chaque étape :

- tout d'abord à « redresser » le vecteur x_{i+1} en un vecteur v_{i+1} orthogonal aux $x_1, \dots, x_i$;
- ensuite à normaliser v_{i+1} pour obtenir e_{i+1}.

Remarques.

- Lorsque la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E, la famille orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ obtenue est une base car elle est libre, en tant que famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul, et génératrice grâce au second point de la propriété.
- Si $(x_1, \dots, x_n)$ est déjà orthogonale, alors $(e_1, \dots, e_n) = \left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|}\right)$.

  Si $(x_1, \dots, x_n)$ est déjà orthonormale, alors $(e_1, \dots, e_n) = (x_1, \dots, x_n)$.

Exercice. On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Orthonormaliser à l'aide du procédé de Gram-Schmidt la famille $((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1))$.

Exercice. On considère $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$. Orthonormaliser la base canonique par le procédé de Gram-Schmidt.

3 Bases orthonormées d'un espace euclidien

Dans toute la suite, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace vectoriel euclidien, c'est à dire un espace vectoriel de dimension finie E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

3.1 Existence de bases orthonormées d'un espace euclidien

Définition.

Une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une *base orthonormée* (ou *orthonormale*) de E s'il s'agit d'une famille orthonormée et d'une base de E.

Exemples.

- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée pour le produit scalaire usuel.
- La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{X-1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\left(X^2 - 2X + \frac{1}{3}\right)\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$.

Propriété 12

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien. Il existe une base orthonormée de E.

Preuve. Puisque E est un espace vectoriel de dimension finie n, il existe une base $(x_1, \ldots, x_n)$ de E. Notons alors $(e_1, \ldots, e_n)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de cette famille. C'est une famille orthonormale, donc libre, de n vecteurs de E. C'est donc une base orthonormée de E. □

Remarque. On retiendra de la preuve précédente que l'orthonormalisée de Gram-Schmidt d'une base de E est une base orthonormée de E.

Remarque. Il n'existe pas qu'une seule base orthonormée pour un espace euclidien.

Exercice. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$, on considère les polynômes de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés à $0, 1, 2$. Montrer que (L_0, L_1, L_2) est aussi une base orthonormée de E.

Propriété 13

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien. Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormée de E.

Preuve. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille orthonormée de E. C'est en particulier une famille libre de E, qu'on peut compléter en une base $(e_1, \dots, e_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ de E. On applique alors à cette famille le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E, en notant que les k premiers vecteurs restent inchangés quand on applique l'algorithme. $\square$

3.2 Formules dans une base orthonormée

L'intérêt des bases orthonormales résulte des propriétés suivantes.

Propriété 14

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien rapporté à une **base orthonormée** $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

- Pour tout $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ et $y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$ de E, on a :
$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n.$$
- Pour tout $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ de E, on a :
$$\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$
- Pour tout $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ de E, on a $x_i = \langle e_i, x\rangle$ pour tout $1 \leq i \leq n$, et donc :
$$x = \langle e_1, x\rangle\, e_1 + \dots + \langle e_n, x\rangle\, e_n.$$

Preuve.

$\square$

Mise en garde.
Ces formules sont valables uniquement lorsque la base $\mathscr{B}$ considérée est **orthonormée**.

Propriété 15

Soient $x, y \in E$, et notons X, Y les vecteurs coordonnées de x et y dans une base **orthonormale** $\mathscr{B}$ de E. Alors on a :

- $\langle x, y\rangle = {}^tXY$.
- $\|x\|^2 = {}^tXX$.

Preuve. Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base orthonormée de E, et écrivons x et y dans cette base :

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \text{ et } y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n, \text{ de sorte que } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

On a :

$${}^tXY = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_iy_i$$

qui est égal à $\langle x, y\rangle$ par la proposition précédente. D'où le premier point. Le deuxième point s'obtient en prenant alors $y = x$. $\square$

3.3 Matrices orthogonales

Définition.

Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *orthogonale* si :

$${}^tMM = I_n.$$

Remarque. M est orthogonale si et seulement si M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$.

Propriété 16

Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes est une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Preuve.

□

Exemple. Les matrices I_n et $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ sont orthogonales.

Exercice. Montrer que si M et N sont orthogonales, alors M^{-1} et MN le sont aussi.

Propriété 17

Soit E un espace euclidien, et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une **base orthonormale** de E.

$$\mathscr{B}' = (f_1, \dots, f_n) \text{ est une base orthonormée de } E \Leftrightarrow P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \text{ est orthogonale.}$$

Preuve.

□

Remarque. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ des bases orthonormées de E, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Notons $A = M_{\mathscr{B}}(f)$, $A' = M_{\mathscr{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. Alors P est orthogonale par la propriété précécente, et on a par formule de changement de bases :

$$A' = P^{-1}AP = {}^tPAP.$$

L'intérêt ici, une fois que l'on connaît une matrice de passage P orthogonale, c'est qu'il n'y a pas besoin de calculer son inverse : il suffit de transposer pour l'obtenir.