Chapitre 12

Couples de variables aléatoires à densité

Compétences attendues.

✓ Déterminer la densité d'une somme de variables aléatoires.

✓ Déterminer la loi d'un maximum/minimum de variables aléatoires.

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en ECS2 au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Somme de deux variables à densité indépendantes

Dans tout ce chapitre, les variables X et Y sont supposées **à densité**, de densités respectives f et g.

1.1 Produit de convolution

Rappels.

- On dit que les variables aléatoires X et Y sont *indépendantes* si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les évènements $[X \leq x]$ et $[Y \leq y]$ sont indépendants, c'est-à-dire $P([X \leq x] \cap [Y \leq y]) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$.
- Si X et Y sont indépendantes, alors pour toutes fonctions φ, ψ dont les ensembles de définition contiennent $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, les variables aléatoires $\varphi(X)$ et $\psi(Y)$ sont indépendantes.

Théorème 1 (*Produit de convolution*)

Supposons que les variables aléatoires à densité X et Y sont **indépendantes**. Supposons de plus que la fonction

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$$

soit définie et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Alors :

- $X + Y$ est une variable aléatoire à densité ;
- la fonction h est une densité de $X + Y$ (en posant $h(x) = 0$ en les réels x où l'intégrale diverge).

Vocabulaire. La fonction h est appelé le *produit de convolution des fonctions f et g*, souvent noté $h = f * g$. On notera l'analogie avec le produit de convolution dans le cas discret où on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k)$$

pour des variables aléatoires discrètes indépendantes X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Remarque. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature, et en cas de convergence sont égales. Cela résulte du théorème de changement de variables, en effectuant le changement de variables affine $u = x - t$. En particulier on notera que $f * g = g * f$.

Théorème 2

Hypothèses :
- X et Y sont indépendantes ;
- f (ou g) est bornée.

Alors $h = f * g$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquence $X + Y$ est une variable aléatoire à densité, de densité la fonction h.

Remarques.

- Le programme officiel précise :

  > « *En cas d'utilisation du produit de convolution, la preuve de sa légitimité n'est pas exigible des candidats.* »

  En pratique, il n'y aura jamais aucune subtilité sur la continuité de h, et on pourra toujours dire sans précaution (autre que l'indépendance !) que h est une densité de $X + Y$.
- Toutes les lois continues usuelles ont une densité bornée sauf $\gamma(\nu)$ lorsque $\nu < 1$.

Méthode.

Pour déterminer la densité d'une somme $X + Y$ de variables continues, on procèdera comme suit :

(i) On commence par préciser que X et Y sont ***indépendantes****.*

(ii) Si l'une des densités f ou g est bornée, alors $X + Y$ est à densité. On l'admettra sinon.

(iii) Une densité de $X + Y$ est :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Les bornes de cette intégrale sont susceptibles de changer suivant la valeur de x. Pour les déterminer :

- *On explicite la fonction $t \mapsto g(x-t)$;*
- *On détermine ensuite,* ***à*** *x* ***fixé****, à quelle condition* ***sur*** *t les quantités $f(t)$ et $g(x-t)$ sont non nulles ;*
- *On représente sur un dessin les valeurs de t pour lesquelles $f(t) \neq 0$ et $g(x-t) \neq 0$;*
- *Après avoir éventuellement distingué plusieurs cas à l'aide du dessin (en faisant varier x), on détermine les bornes des intégrales qu'il faut calculer, puis on calcule ces intégrales.*

Exercice. Soient X et Y des variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes deux la loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$. Déterminer la loi de $X + Y$.

1.2 Stabilité des lois γ

Théorème 3 (*Stabilité par somme des lois gamma*)

Hypothèses :
- $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$ et $Y \hookrightarrow \gamma(\nu')$
- X et Y sont indépendantes

Alors $X+Y \hookrightarrow \gamma\left(\nu+\nu'\right)$.

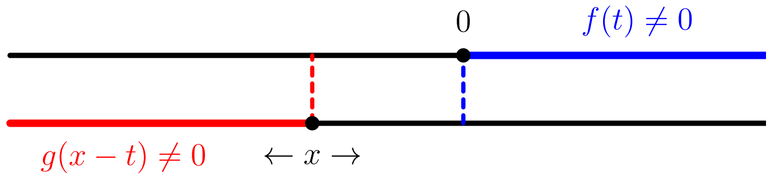
Preuve. Soit f une densité de X, g une densité de Y. Considérons alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t.$$

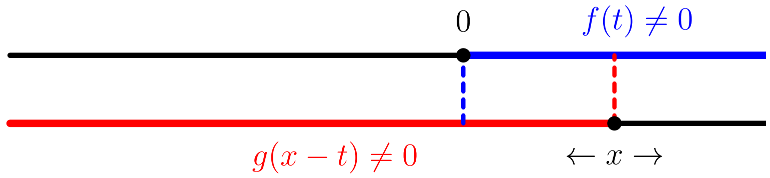
On admet[1] que cette fonction est bien définie et continue sauf peut-être en 0, de sorte qu'il s'agit d'une densité de $X+Y$. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1}e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x-t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x-t \leq 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} (x-t)^{\nu-1}e^{-(x-t)} & \text{si } x-t > 0 \end{cases}.$$

En particulier on a $f(t) \neq 0$ si et seulement si $t > 0$ et $g(x-t) \neq 0$ si et seulement si $x-t > 0$, soit encore $x > t$.



Si $x \leq 0$, on a $f(t)g(x-t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (c'est la situation représentée ci-dessus) et donc $h(x) = 0$.



Si $x > 0$. Alors on a $f(t)g(x-t) \neq 0$ si $t \in [0,x]$ (situation ci-dessus). Ainsi on a :

$$h(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu')} \int_0^x t^{\nu-1}(x-t)^{\nu'-1}e^{-t}e^{-(x-t)}\mathrm{d}t = \frac{x^{\nu'-1}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu')} \int_0^x t^{\nu-1}\left(1-\frac{t}{x}\right)^{\nu'-1} e^{-x}\mathrm{d}t$$

On procède alors au changement de variables affine (donc licite) $u = \dfrac{t}{x}$, de sorte que :

$$h(x) = \frac{x^{\nu'-1}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu')} \int_0^1 (xu)^{\nu-1}(1-u)^{\nu'-1}e^{-x}x\mathrm{d}u = \underbrace{\left(\frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu')} \int_0^1 (u)^{\nu-1}(1-u)^{\nu'-1}\mathrm{d}u\right)}_{=:B(\nu,\nu')} x^{\nu+\nu'-1}e^{-x}.$$

Puisque h est une densité, on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x = 1 \quad \Rightarrow \quad B(\nu,\nu') \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^{\nu+\nu'-1}e^{-x}\mathrm{d}x}_{=\Gamma(\nu+\nu')} = 1.$

Ainsi $B(\nu,\nu') = \dfrac{1}{\Gamma(\nu+\nu')}$, et on a : $\quad \forall x > 0, \quad h(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\nu+\nu')} x^{\nu+\nu'-1}e^{-x}.$

On reconnait finalement la densité de la loi $\gamma(\nu+\nu')$, donc $X+Y \hookrightarrow \gamma(\nu+\nu')$. $\square$

Remarque. Si X et Y sont indépendantes et suivent une loi $\mathscr{E}(1) = \gamma(1)$, alors $X+Y \hookrightarrow \gamma(2)$ et on retrouve le résultat obtenu plus haut.

Remarque. Si on se souvient que la somme de deux lois γ est encore une loi $\gamma(\nu)$, il est facile de retrouver le paramètre de cette loi puisque $\nu = E(X+Y) = E(X)+E(Y) = \nu_1+\nu_2$.

[1] Si $\nu \geq 1$ ou $\nu' \geq 1$, alors cela résulte du Théorème 2.

1.3 Stabilité des lois normales

Théorème 4 (*Stabilité de l'ensemble des lois normales*)

Hypothèses :
- $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m', \sigma'^2)$.
- X et Y sont indépendantes

Alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m + m', \sigma^2 + \sigma'^2)$.

Preuve. On commence par le cas où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, s^2)$. La densité d'une loi normale étant bornée, on sait que $h = f_X * f_Y$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Calculons pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2\pi s} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2s^2}} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi s} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2s^2}\left[s^2t^2 + t^2 - 2xt\right] - \frac{x^2}{2s^2} \right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

On pose alors $\nu = \sqrt{1+s^2}$, et on fait une factorisation canonique de l'expression entre crochets :

$$(1+s^2)t^2 - 2xt = \nu^2 t^2 - 2xt = \left(\nu t - \frac{1}{\nu} x \right)^2 - \frac{x^2}{\nu^2}$$

On obtient donc en remplaçant dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2\pi s} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2s^2}\left(\nu t - \frac{x}{\nu}\right)^2 + \frac{x^2}{2s^2\nu^2} - \frac{x^2}{2s^2} \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2\nu^2}\right)}}{2\pi s} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2s^2}\left(\nu t - \frac{x}{\nu}\right)^2 \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2}\frac{\nu^2-1}{s^2}}}{2\pi s} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2s^2}\left(\nu t - \frac{x}{\nu}\right)^2 \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2\nu^2}}}{2\pi s} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{s} t - \frac{x}{s\nu}\right)^2 \right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variables affine $u = \dfrac{\nu}{s} t - \dfrac{x}{s\nu}$. On obtient :

$$h(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\nu^2}}}{2\pi s} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} u^2 \right) \frac{s}{\nu} \mathrm{d}u = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\nu^2}}}{2\pi s} \frac{s\sqrt{2\pi}}{\nu} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\nu^2}}}{\nu\sqrt{2\pi}}$$

On a ainsi montré que $X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \nu^2) = \mathcal{N}(0, 1+s^2)$.

Faisons à présent le cas général en supposant $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m', \sigma')$. Alors on a :

$$X' = \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \quad \text{et} \quad Y' = \frac{Y - m'}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{\sigma'^2}{\sigma^2}).$$

X et Y étant indépendantes, il en est de même pour X' et Y'. Par ce qu'on vient de montrer, on obtient :

$$X' + Y' \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1 + \frac{\sigma'^2}{\sigma^2}).$$

On peut donc conclure que :

$$X + Y = \sigma(X' + Y') + m + m' \hookrightarrow \mathcal{N}(m + m', \sigma^2(1 + \frac{\sigma'}{\sigma})) = \mathcal{N}(m + m', \sigma^2 + \sigma'^2).$$

□

Remarque. De même, si on se souvient que la somme de deux lois normales indépendantes est encore une loi normale, les paramètres de cette loi se retrouvent facilement : son espérance est la somme des espérances de X et de Y (par linéarité de l'espérance), et sa variance est la somme des variances (car X et Y sont indépendantes).

2 Maximum, minimum

Propriété 5

Soient X, Y des variables aléatoires à densité définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Posons $Z = \max(X, Y)$. On a pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$[Z \leq z] = [X \leq z] \cap [Y \leq z].$$

De plus, si X et Y sont indépendantes, alors on a :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad F_Z(z) = F_X(z) \times F_Y(z).$$

Preuve. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a :

$$Z \leq z \quad \Leftrightarrow \quad \max(X, Y) \leq z \quad \Leftrightarrow \quad X \leq z \textbf{ et } Y \leq z.$$

D'où l'égalité $[Z \leq z] = [X \leq z] \cap [Y \leq z]$. On obtient en prenant la probabilité de ces évènements :

$$P(Z \leq z) = P([X \leq z] \cap [Y \leq z]) = P(X \leq z)P(Y \leq z) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indép.}$$

D'où $F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. □

Propriété 6

Soient X, Y des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Posons $T = \min(X, Y)$. On a pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$[T > z] = [X > z] \cap [Y > z].$$

De plus, si X et Y sont indépendantes, alors on a :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad 1 - F_T(z) = (1 - F_X(z)) \times (1 - F_Y(z)).$$

Preuve. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a :

$$Z > z \quad \Leftrightarrow \quad \min(X, Y) > z \quad \Leftrightarrow \quad X > z \textbf{ et } Y > z.$$

D'où l'égalité $[Z > z] = [X > z] \cap [Y > z]$. On obtient en prenant la probabilité de ces évènements :

$$P(Z > z) = P([X > z] \cap [Y > z]) = P(X \leq z)P(Y \leq z) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indép.}$$

soit en passant aux évènements contraires :

$$1 - P(Z \leq z) = (1 - P(X \leq z))(1 - P(Y \leq z)).$$

On obtient donc $F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. □

3 Espérance, variance

Propriété 7 *(Linéarité de l'espérance)*

Soit X et Y deux variables aléatoires à densité admettant une espérance. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et on a :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

Propriété 8

Soit X et Y deux variables aléatoires à densité **indépendantes** et admettant une espérance. Alors la variable aléatoire XY admet une espérance et on a :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Propriété 9

Soit X et Y deux variables aléatoires à densité **indépendantes** et admettant une variance. Alors la variable aléatoire $X+Y$ admet une variance et on a :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

Remarque. On pourrait définir pour les variables à densité, de la même façon que pour les variables discrètes, la notion de covariance. Cette notion et les résultats qui gravitent autour sont hors-programme mais sont parfois introduits dans certains problèmes de concours.