Chapitre 18

Endomorphismes symétriques

Compétences attendues.

- ✓ Montrer qu'un endomorphisme est symétrique.
- ✓ Diagonaliser une matrice symétrique en base orthonormée.
- ✓ Étudier le signe d'une forme quadratique associée à une matrice symétrique.

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en ECS2 au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
mansuy.mathieu@hotmail.fr

1 Endomorphismes symétriques et matrices symétriques

Dans tout le chapitre, E désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée $\| \cdot \|$.

1.1 Définition

Définition.

Un endomorphisme f de E est dit *symétrique* si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

Exemple. Un projecteur orthogonal est symétrique.

Exercice. Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$. Montrer que l'application transposée $f : E \to E, M \mapsto {}^tM$ est symétrique.

1.2 Propriétés

Rappel. Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symétrique* si ${}^tM = M$, c'est-à-dire si :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad m_{i,j} = m_{j,i}.$$

Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est symétrique.

Propriété 1

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $\mathscr{B}$ une **base orthonormée** de E. Alors on a :

$$f \text{ est un endomorphisme symétrique} \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathscr{B}}(f) \text{ est symétrique.}$$

Preuve.

$\square$

Propriété 2

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.
p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.
Dans ce cas, p est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(p)$, et on a $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p)^{\perp}$.

Preuve.

$\square$

Exercice. Caractériser l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Rappel. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Un sous-espace F de E est *stable par f* si :

$$\forall x \in F, \quad f(x) \in F.$$

Propriété 3

Soit f un endomorphisme symétrique, et soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Alors $F^{\perp}$ est également stable par f.

Preuve.

□

2 Réduction des endomorphismes et des matrices symétriques

2.1 Réduction des endomorphismes symétriques

Propriété 4

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

Plus précisément : si $e_1, \ldots, e_p$ sont des vecteurs propres de f associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthogonale.

Preuve.

□

Théorème 5

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors f est diagonalisable, à valeurs propres réelles, et il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f.

Preuve. On admet que f est diagonalisable à valeurs propres réelles. Pour une preuve de ce résultat,

☞ **Complément de cours 6. Réduction des endomorphismes symétriques.**

Montrons malgré tout les autres assertions de ce théorème.

□

2.2 Réduction des matrices symétriques réelles

Théorème 6

Soit A une matrice symétrique **réelle**. Alors A est diagonalisable, à valeurs propres réelles, et il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle D telles que :

$$D = P^{-1}AP = {}^tPAP.$$

Preuve.

□

Mise en garde.

Ce résultat est faux pour les matrices symétriques **complexes**.

La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est par exemple bien symétrique complexe. Mais elle n'est pas diagonalisable car on peut montrer qu'elle n'a qu'une seule valeur propre $\lambda = 0$ alors que $M \neq 0_2$.

Il faudra donc bien spécifier à chaque utilisation de ce théorème que la matrice considérée est symétrique **réelle**.

Méthode.

Pour diagonaliser une matrice symétrique réelle A en base orthonormée, c'est-à-dire pour obtenir P une matrice orthogonale et D une matrice diagonale telles que $D = {}^tPAP$, on procèdera comme suit :

- *on sait qu'elle est diagonalisable car symétrique réelle ;*
- *on détermine les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (toutes réelles) de A (en utilisant un polynôme annulateur, la trace, ou le pivot de Gauss) ;*
- *on détermine une base orthonormée $\mathscr{B}_i$ de chacun des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(A)$ (éventuellement à l'aide du procédé de Gram Schmidt) ;*
- *la base $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_p$ obtenue par concaténation des bases $\mathscr{B}_i$ est une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;*
- *la matrice P de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathscr{B}$ est orthogonale. Donc $P^{-1} = {}^tP$ et on a :*

$$ {}^tPAP = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{\dim(E_{\lambda_1})}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{\dim(E_{\lambda_p})}). $$

Exercice. Diagonaliser en base orthonormée la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 7

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (réelles) de A (non nécessairement distinctes deux à deux). Alors A s'écrit :

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \, {}^t X_i$$

où $(X_1, \dots, X_n)$ est une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, X_i est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i.

Preuve. Posons $B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \, {}^t X_i$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$BX_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \, {}^t X_i \right) X_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \, {}^t X_i X_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \underbrace{\langle X_i, X_j \rangle}_{=\delta_{i,j}} = \lambda_j X_j = AX_j$$

Ainsi les endomorphismes φ_A et φ_B canoniquement associés à A et B coïncident sur une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ils sont donc égaux, et leurs matrices dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ aussi. Ainsi on a $A = \mathscr{M}_{\mathscr{C}}(\varphi_A) = \mathscr{M}_{\mathscr{C}}(\varphi_B) = B$. □

Remarque. Soit A la matrice d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormée $\mathscr{B}$. Alors A est une matrice symétrique réelle ayant deux valeurs propres 0 et 1. Si $(X_1, \dots, X_p)$ est une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathrm{Im}(A)$ et $(X_{p+1}, \dots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(A)$, alors on a d'après la propriété précédente :

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \, {}^t X_i = \sum_{i=1}^{p} X_i \, {}^t X_i.$$

On retrouve ici un résultat obtenu dans le **Chapitre 16. Projection orthogonale**.

3 Forme quadratique associée à une matrice symétrique

3.1 Définition

Définition.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. On appelle *forme quadratique associée à* A l'application q_A de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad q_A(x) = (x_1 \ \dots \ x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Si X est la matrice de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $q_A(x) = {}^t X A X$.

Exemples. Déterminons q_A dans les cas suivants :

- $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarques.

- Une forme quadratique est une combinaison linéaire de termes de la forme x_i^2 ou $x_i x_j$: on parle de *polynôme homogène de degré 2*. En particulier, $q_A(x)$ ne contient pas de terme en x_i, en $x_i x_j x_k$ ou encore de terme constant.
- Une forme quadratique étant une fonction polynomiale, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Mise en garde.

Attention, une forme quadratique n'est pas une application linéaire ! Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a par exemple :

$$q_A(\lambda \cdot x) = {}^t(\lambda X)A(\lambda X) = \lambda\, {}^tXA(\lambda X) = \lambda^2\, {}^tXAX = \lambda^2 q_A(x).$$

Remarque. Réciproquement, une fonction polynomiale q homogène de degré 2 est une forme quadratique : en effet, s'il existe des réels $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ tels que :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n} a_{i,j}x_i x_j,$$

alors q est égale à la forme quadratique q_A associée à la matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

Exercice. Déterminer la matrice symétrique $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ associée à la forme quadratique :

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3.$$

3.2 Signe d'une forme quadratique

Propriété 8

Soit A une matrice symétrique réelle, et f l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q_A(x) = \langle x, f(x)\rangle.$$

Preuve.

$\square$

Propriété 9

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ associée à un endomorphisme symétrique f.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormée** de vecteurs propres de f associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (non nécessairement distinctes).

Si $x \in \mathbb{R}^n$ est de coordonnées $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans la base $\mathscr{B}$, alors on a :

$$q(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k^2.$$

Preuve.

$\square$

Corollaire 10

Soit A une matrice symétrique réelle, et q_A la forme quadratique associée. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$m\|x\|^2 \leq q_A(x) \leq M\|x\|^2$$

où m (resp. M) est la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de A.

Preuve.

$\square$

Théorème 11

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, et q_A la forme quadratique associée.

- Si **toutes** les valeurs propres de A sont positives (resp. négatives), alors :

  $$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q_A(x) \geq 0 \quad (\text{resp. } q_A(x) \leq 0).$$

  On dit alors que q_A est une forme quadratique *positive* (resp. *négative*).

- Si **toutes** les valeurs propres de A sont strictement positives (resp. strictement négatives), alors :

  $$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}, \quad q_A(x) > 0 \quad (\text{resp. } q_A(x) < 0).$$

  On dit alors que q_A est une forme quadratique *strictement positive* (resp. *strictement négative*).

- Si A possède des valeurs propres non nulles de signes contraires, alors q_A n'est pas de signe constant.

Preuve.

□

Méthode.

Pour étudier le signe d'une forme quadratique q associée à une matrice symétrique A, on peut selon les cas :

- *soit écrire $q(x)$ comme combinaison linéaire de carrés ;*
- *soit déterminer les valeurs propres de A et conclure grâce au théorème précédent.*

Exercice. Déterminer le signe de la forme quadratique q à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice. Déterminer le signe de la forme quadratique

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$