Chapitre 19

Estimation ponctuelle

Compétences attendues.

- ✓ Calculer le biais d'un estimateur.
- ✓ Montrer qu'un estimateur est sans biais ou asymptotiquement sans biais.
- ✓ Calculer le risque quadratique d'un estimateur.
- ✓ Comparer deux estimateurs.
- ✓ Montrer qu'un estimateur est convergent.

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en ECS2 au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
mansuy.mathieu@hotmail.fr

1 Position du problème

On étudie un phénomène aléatoire qui est reproductible dans des conditions identiques et indépendantes. On connait pour des raisons théoriques ou empiriques le type de loi le décrivant. Mais les paramètres de la dite loi sont souvent inconnus. On doit donc les estimer : c'est l'objectif de ce qu'on appelle la statistique inférentielle.

Exemples.

- À l'approche du second tour d'une élection présidentielle, on interroge une personne au hasard et on note $X = 1$ si elle se prononce pour le candidat A et $X = 0$ si c'est pour le candidat B. X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\theta_0 \in [0, 1]$ inconnu qui correspond à la proportion de français qui votent pour A.
- On souhaite modéliser le nombre N de voitures se présentant à un péage en une heure. Il s'agit du nombre de réalisations d'un évènement rare sur un grand nombre d'observations. On sait donc que ce nombre N suit une loi de Poisson. On cherche le paramètre de cette loi.
- On souhaite modéliser la durée de vie T d'un appareil électrique. Ce phénomène étant sans mémoire, il se modélise à l'aide d'une loi exponentielle. Il s'agit de trouver son paramètre.

Notons X la variable égale au résultat de notre expérience aléatoire. On suppose donc que l'on ne connaît qu'imparfaitement la loi de X : on sait de quel type elle est (elle appartient à une famille de lois $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ connue) mais elle dépend d'un paramètre θ inconnu appartenant à Θ l'espace des paramètres. Le paramètre θ peut être réel (Θ est une partie $\mathbb{R}$) ou vectoriel (Θ est une partie de $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$).

Exemple. Dans les trois cas précédents, on a :

- $X \hookrightarrow \mathscr{B}(\theta)$, $\Theta =]0, 1[$;
- $N \hookrightarrow \mathscr{P}(\theta)$, $\Theta = \mathbb{N}$;
- $T \hookrightarrow \mathscr{E}(\theta)$, $\Theta =]0, +\infty[$.

On peut aussi imaginer le cas de $X \hookrightarrow \mathscr{N}(m, \sigma^2)$ où $\theta = (m, \sigma^2)$ est inconnu (paramètre vectoriel, $\Theta = \mathbb{R}\times]0, +\infty[$).

L'objectif de la statistique inférentielle est d'estimer la vraie valeur[1] θ_0 du paramètre θ à partir de réalisations[2] de la variable X.

2 Vocabulaire de l'estimation

2.1 Échantillonage

Bien entendu, une seule réalisation d'une variable aléatoire de loi μ ne permettra pas d'obtenir beaucoup d'informations sur μ. On est donc amené à introduire la notion d'échantillon.

Définition.

- On appelle *n-échantillon de loi mère μ* sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires i.i.d. suivant toutes la loi μ.
- Un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est une *réalisation de l'échantillon* (ou *échantillon observé*) si c'est une réalisation du vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$, c'est-à-dire si :

$$\exists \omega \in \Omega, \quad (x_1, \ldots, x_n) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

[1] En pratique, on désignera la variable θ et la vraie valeur θ_0 que l'on cherche à évaluer par la même lettre θ.
[2] Par réalisation de X, on entend la valeur $x = X(\omega)$ que prend la variable X en une certaine éventualité ω.

Remarque. Un échantillon est un n-uplet de variables aléatoires alors qu'un échantillon observé est un n-uplet de réels. Si par exemple $\mathscr{E}(\theta)$ est la loi mère du n-échantillon, alors `grand(1,n,'exp',1/theta)` fournit une réalisation de cet échantillon.

Modèle statistique.
Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ un échantillon de données obtenu en observant n fois le phénomène aléatoire. On admettra l'existence de n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, toutes définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$, telles que $(x_1, \ldots, x_n)$ soit une réalisation de $(X_1, \ldots, X_n)$, c'est-à-dire :

$$\exists \omega \in \Omega, \quad (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Pour tout $\theta \in \Theta$, on admettra de plus l'existence d'une probabilité P_θ sur $(\Omega, \mathscr{A})$ telle que $(X_1, \ldots, X_n)$ soit un n-échantillon P_θ-indépendant de loi mère μ_θ.

Notation. Si X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A})$, on notera, en cas d'existence, $E_\theta(X)$ et $V_\theta(X)$ son espérance et sa variance pour la probabilité P_θ.

Exemple. Reprenons l'exemple de l'élection présidentielle. On questionne 5 individus sur leurs intentions de vote et on obtient les résultats suivants[3] (en notant 1 ou 0 selon que le choix se porte sur le candidat A ou B) :

$$1, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 0.$$

Ces résultats observés correspondent, pour tout $\theta \in [0, 1]$, à la réalisation d'un 5-échantillon $(X_1, \ldots, X_5)$ P_θ-indépendant de loi mère $\mathscr{B}(\theta)$. Pour tout $1 \leq i \leq 5$, on a $E_\theta(X_i) = \theta$ et $V_\theta(X_i) = \theta(1 - \theta)$.

2.2 Estimateur

À partir d'un échantillon observé, on souhaite estimer une valeur caractéristique de la loi μ_θ telle que son espérance, sa variance, son étendue... On notera $g(\theta)$ cette valeur, où $g : \Theta \to \mathbb{R}$.

Définition.

- On appelle *estimateur* (d'ordre n) de $g(\theta)$ toute variable aléatoire T_n de la forme $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$, où $(X_1, \ldots, X_n)$ est un n-échantillon.
- On appelle *estimation* de $g(\theta)$ une réalisation $t_n = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de $T_n = \varphi(X_1, \ldots, X_n)$.

Remarques.

- Un estimateur de $g(\theta)$ est une variable aléatoire alors qu'une estimation de $g(\theta)$ est un réel.
- L'estimateur T_n ne dépend que du n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$. En particulier, φ ne doit pas dépendre du paramètre θ qui est inconnu et qu'on cherche justement à estimer.

Définition.
On appelle *moyenne empirique* l'estimateur :

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

[3] En toute rigueur, on ne sonde pas deux fois la même personne, et les résultats obtenus ne correspondent donc pas à une même expérience reproduite de manière identique et indépendante. Mais n étant négligeable devant la population française, on peut raisonnablement le supposer.

Exemple. Reprenons l'exemple de l'élection présidentielle. La moyenne empirique $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ est l'estimateur le plus naturel de θ. On obtient avec l'échantillon observé que :

$$\overline{X_n}(\omega) = \frac{1}{5}(1+0+0+1+0) = \frac{2}{5} \text{ est une estimation de } \theta.$$

On peut envisager bien d'autres estimateurs pour θ, comme par exemple :

$$A_n = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} kX_k \quad \text{ou} \quad B_n = 0,$$

chacun fournissant une autre estimation de θ à partir de notre échantillon observé :

$$A_n(\omega) = \frac{2}{5\times 6}(1+0+0+4+0) = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad B_n(\omega) = 0.$$

On verra dans la suite comment décider :

- s'il est pertinent de prendre ces nombres comme estimation de θ ou non[4] ;
- si l'une de ces estimateurs est plus pertinent que les autres, c'est-à-dire s'il donne en moyenne des estimations « plus proche » de la véritable valeur de θ.

Exemple. Si $(X_1, \dots, X_n)$ est un n-échantillon de loi mère $\mathscr{E}(\theta)$, alors $\overline{X_n}$ est un estimateur de $g(\theta) = \dfrac{1}{\theta}$, et `mean(grand(1,n,'exp',1/theta))` en est une estimation.

Exemple. Si $(X_1, \dots, X_n)$ est un n-échantillon de loi mère $\mathscr{U}([a, b])$ de paramètre vectoriel inconnu $\theta = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$T_n = \max(X_1, \dots, X_n) - \min(X_1, \dots, X_n)$$

est un estimateur de $g(\theta) = b - a$. Beaucoup d'autres estimateurs sont possibles, comme le suivant[5] :

$$U_n = 2\overline{X_n}.$$

Remarque. Très souvent, on prendra $g = Id_{\mathbb{R}}$ et on estimera θ directement. Mais on peut aussi chercher à estimer une fonction $g(\theta)$ des paramètres, par exemple pour l'étendue d'une loi uniforme comme dans l'exemple précédent. On peut aussi vouloir estimer $g(\theta)$ et non θ directement par facilité de calculs : pour la loi exponentielle de paramètre θ par exemple, il est plus facile d'estimer $g(\theta) = \dfrac{1}{\theta}$ en utilisant la moyenne empirique.

3 Précision d'un estimateur

Comme on l'a déjà vu, la définition très générale d'un estimateur ne présume en rien de sa pertinence. L'objectif à présent est de comparer les différents estimateurs et d'essayer d'isoler les plus intéressants pour l'estimation de $g(\theta)$.

[4] Bien sûr, l'estimation de θ obtenue par B_n n'est absolument pas pertinente, même si B_n répond bien lui aussi à la définition d'estimateur.

[5] Pourquoi cet estimateur est-il pertinent ?

3.1 Biais d'un estimateur

Définition.

Soit T_n un estimateur de $g(\theta)$. On suppose que pour tout $\theta \in \Theta$, T_n admet une espérance $E_\theta(T_n)$ pour la probabilité P_θ.

- Pour tout $\theta \in \Theta$, on appelle *biais de T_n en $g(\theta)$* le réel

$$b_\theta(T_n) = E_\theta(T_n) - g(\theta).$$

- On dit que T_n est un *estimateur sans biais de $g(\theta)$* lorsque pour tout $\theta \in \Theta$,

$$b_\theta(T_n) = 0 \quad \text{ou encore} \quad E_\theta(T_n) = g(\theta).$$

  Dans le cas contraire, on dit que T_n est un estimateur *biaisé*.

Remarque. On a $b_\theta(T_n) = E_\theta(T_n) - g(\theta) = E_\theta(T_n - g(\theta))$. Le biais de T_n est donc l'erreur commise en moyenne par l'estimateur T_n. Un estimateur T_n est sans biais lorsque l'erreur commise en moyenne est nulle.

Propriété 1

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon, et m (que l'on devrait en fait noté $m(\theta)$) l'espérance de la loi mère de l'échantillon, alors la moyenne empirique

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

est un estimateur sans biais de m.

Preuve.

□

Exercice. Déterminer le biais des estimateurs $A_n = \dfrac{2}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kX_k$ et $B_n = 0$ de m.

Exercice. On suppose que la loi mère de l'échantillon est une loi uniforme $\mathscr{U}([0,\theta])$. On considère l'estimateur $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ de θ.

1. Montrer que T_n est une variable à densité et en déterminer une densité.
2. T_n est-il un estimateur sans biais de θ ?
3. Donner un estimateur T'_n sans biais de θ.

Exemple. Simulons la situation précédente à l'aide de `Scilab` : on cherche à estimer le paramètre θ inconnu d'une loi uniforme $\mathscr{U}([0,\theta])$ à l'aide de l'estimateur T'_n.

```
theta = grand(1,1,'exp',10); //choix de theta au hasard
X = grand(1,100,'unf',0,theta); //réalisation d'un echantillon de taille 100
T'=(101/100)*max(X); //estimation de theta par T'
disp(T')
disp(theta)
```

En exécutant ce programme, on obtient par exemple $T'_{100} = 1,531$ alors que $\theta = 1,553$.

Notons qu'on n'est jamais à l'abri d'un « mauvais » échantillon : il se peut (même si ceci est peu probable, surtout lorsque n est grand) que tous les X_i soient inférieurs à $\frac{\theta}{2}$ et donc que T'_n retourne une estimation de θ assez éloignée de sa valeur réelle.

3.2 Risque quadratique

Le fait d'être un estimateur sans biais n'est ni une condition nécessaire, ni une condition suffisante pour être un estimateur de bonne qualité :

- si T_n est sans biais, mais que sa variance est grande, il prendra souvent des valeurs très éloignées de $g(\theta)$;
- à l'inverse, si T_n est faiblement biaisé mais de variance petite, il sera sans doute meilleur puisqu'il donnera des estimations de $g(\theta)$ qui seront certes en moyenne erronées mais proches de $g(\theta)$, et très regroupées.

Il nous faut donc un critère de qualité portant sur la variance.

Définition.

Soit T_n un estimateur de $g(\theta)$. On suppose que pour tout $\theta \in \Theta$, T_n admet un moment d'ordre 2 pour la probabilité P_θ.

Pour tout $\theta \in \Theta$, on appelle *risque quadratique de T_n (en $g(\theta)$)* et on note $r_\theta(T_n)$ le réel :

$$r_\theta(T_n) = E_\theta\left[\left(T_n - g(\theta)\right)^2\right].$$

Remarque. Le risque quadratique mesure la « dispersion moyenne » de T_n par rapport à $g(\theta)$.

3.3 Décomposition biais-variance du risque quadratique

Propriété 2 (Décomposition biais-variance du risque quadratique)

Soit T_n un estimateur de $g(\theta)$. On suppose que pour tout $\theta \in \Theta$, T_n admet un moment d'ordre 2 pour la probabilité P_θ. Alors on a :

$$r_\theta(T_n) = \left[b_\theta(T_n)\right]^2 + V_\theta(T_n).$$

En particulier si T_n est sans biais, on a $r_\theta(T_n) = V_\theta(T_n)$.

Preuve. Appliquons la formule de Huygens à la variable aléatoire $T_n - g(\theta)$.

□

Remarque. Si le risque quadratique est faible, alors à la fois le biais et la variance sont faibles, de sorte que même si l'estimateur est biaisé, il donne en moyenne des estimations proches de $g(\theta)$ et très regroupées. Ce risque quadratique est donc un bon critère de qualité.

Méthode.

Pour comparer deux estimateurs T_n et U_n de $g(\theta)$, on calculera leur risque quadratique. Si on a :

$$\forall \theta \in \Theta, \quad r_\theta(T_n) < r_\theta(U_n),$$

alors T_n est un meilleur[a] *estimateur de $g(\theta)$ que U_n.*

[a]Il commet en moyenne moins d'erreurs pour estimer $g(\theta)$.

Exercice. Reprenons le cas d'une élection présidentielle, et donc d'un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de loi mère $\mathscr{B}(\theta)$.

1. Déterminer le risque quadratique des estimateurs $\overline{X_n}$, $A_n = \dfrac{2}{n(n+1)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kX_k$ et $B_n = 0$ de θ.
2. De $\overline{X_n}$, A_n et B_n, quel estimateur de m privilégieriez vous ?

Exemple. Testons nos résultats à l'aide de `Scilab`. Pour cela, on va choisir un paramètre θ au hasard dans $[0,1]$, correspondant à la proportion réelle de votants pour le candidat A.

```
--> theta = rand();
```

`Scilab` connait déjà le résultat du scrutin, et on pourrait lui demander avec l'instruction `disp(theta)`, mais gardons pour le moment le mystère... On va estimer ce paramètre à l'aide des résultats précédents. Il nous faut pour cela un échantillon observé, qu'on prendra de taille $n = 60$ par exemple.

```
--> e = grand(1,60,'bin',1,theta);
```

Grâce à cet échantillon, on peut obtenir trois estimations $\overline{x_{60}}$, a_{60} et b_{60} de θ à l'aide respectivement de $\overline{X_{60}}$, A_{60} et B_{60}. Bien sûr on a $b_{60} = 0$. Demandons à `Scilab` de calculer les autres :

```
--> x60 = mean(e); a60 = (2/(60*61))*sum([1:60].*e);
```

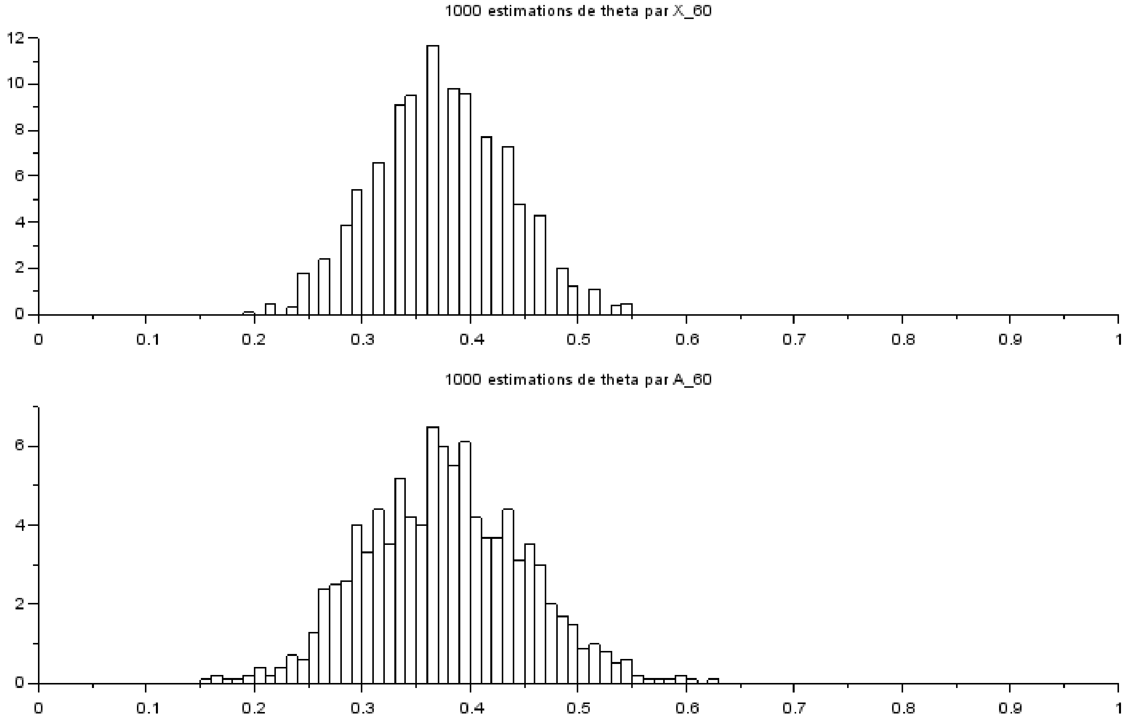
On obtient `x60 = 0.3166667` et `a60 = 0.2737705`. De ces trois estimations ponctuelles de θ, on privilégiera `x30` puisque $\overline{X_n}$ a le plus petit risque quadratique. On peut enfin comparer ces estimations ponctuelles avec la valeur réelle de θ : `disp(theta, 'theta = ')` renvoie `theta = 0.3760119`. On remarque que `x30` est bien l'estimation la plus proche[6] de θ.

On peut répéter ce procédé pour 1000 échantillons de taille 60, et donc pour 1000 estimations de θ par $\overline{X_{60}}$ et A_{60}, et comparer les histogrammes des fréquences des estimations à l'aide du programme `Scilab` suivant :

```
n=60
E = grand(1000,n,"unf",0,1) //1000 échantillons observés
X=[]//estimateur moyenne empirique
A=[]//estimateur A_n
alpha=2/(n*(n+1))
for k=1:1000
    X=[X,mean(E(k,:))]
    S=sum((1:n).*E(k,:))
    A=[A,alpha*S]
end

subplot(2,1,1)
histplot(0:0.01:1,X)
title('1000 estimations de theta par X_60');
subplot(2,1,2)
histplot(0:0.01:1,A)
title('1000 estimations de m par A_60');
```

[6] Ce n'était pas nécessairement le cas, on aurait pu tomber ponctuellement sur un « mauvais » échantillon pour lequel la meilleure estimation aurait été `a60`, voir `b60`, même si cela était peu probable.



Histogramme des fréquences des estimations de θ.

Notons que les estimations obtenues par $\overline{X_{60}}$ et par A_{60} sont en moyenne égales à θ (les histogrammes sont « centrés en θ »), ce qui n'est pas étonnant puisque ces deux estimateurs sont sans biais. On notera aussi que les estimations de θ obtenues à l'aide par A_{60} sont (très légèrement) plus dispersées que celles obtenues par $\overline{X_{60}}$, ce qui provient du fait que $r_\theta(\overline{X_{60}}) < r_\theta(A_{60})$ (ces deux termes étant malgré tout du même ordre de grandeur).

Exercice. Reprenons le cas d'une loi mère de l'échantillon égale à une loi uniforme $\mathscr{U}([0,\theta])$. Calculer le risque quadratique de l'estimateur $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ de θ.

4 Suites d'estimateurs

4.1 Généralités

Définition.

Une *suite d'estimateurs* de $g(\theta)$ est la donnée pour tout $n \geq 1$ d'un estimateur T_n d'ordre n de $g(\theta)$. En particulier, chaque T_n est de la forme $\varphi_n(X_1, \ldots, X_n)$.

Exemple. La suite $(\overline{X_n})_{n\geq 1}$ des moyennes empiriques est une suite d'estimateurs de l'espérance m de la loi mère.

Définition.

On dit qu'une suite $(T_n)_{n\geq 1}$ d'estimateurs de $g(\theta)$ est *asymptotiquement sans biais* (ou plus simplement que T_n est *asymptotiquement sans biais*) si pour tout $\theta \in \Theta$:

$$\lim_{n\to+\infty} b_\theta(T_n) = 0.$$

Remarque. Cela signifie que les T_n peuvent être des estimateurs biaisés, mais que plus n est grand, plus le biais est petit.

Exemples.

- Si T_n est un estimateur sans biais de $g(\theta)$, alors T_n est asymptotiquement sans biais. Ainsi $\overline{X_n}$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de l'espérance m.
- On suppose que la loi mère de l'échantillon est $\mathscr{U}([0,\theta])$. Alors $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ car pour tout $\theta \in \Theta$:

$$b_\theta(T_n) = -\frac{\theta}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4.2 Estimateurs convergents

Définition.

On dit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'estimateurs de $g(\theta)$ est *convergente* (ou plus simplement que T_n est un estimateur *convergent* de $g(\theta)$) lorsque pour tout $\theta \in \Theta$, on a :

$$T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P_\theta} g(\theta)$$

soit encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P_\theta(|T_n - g(\theta)| \geq \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque. Cela signifie que pour n grand, T_n prend des valeurs très proches de $g(\theta)$ avec une probabilité voisine de 1.

Propriété 3

Si la loi mère admet une espérance m et une variance σ^2, alors $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ est un estimateur sans biais et convergent de m.

Preuve.

□

Propriété 4

Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente d'estimateurs de $g(\theta)$ et si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors $\big(f(T_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente d'estimateurs de $f\big(g(\theta)\big)$.

4.3 Condition suffisante de convergence

Propriété 5 (Condition suffisante de convergence)

Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ une suite d'estimateurs de $g(\theta)$ admettant un risque quadratique. Si pour tout $\theta \in \Theta$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} r_\theta(T_n) = 0,$$

alors T_n est un estimateur convergent de $g(\theta)$.

Preuve.

□

Méthode.

Pour montrer la convergence d'un estimateur T_n de $g(\theta)$, on pourra procéder comme suit :

- *regarder si cela ne relèverait pas directement de la loi faible des grands nombres ;*
- *sinon on peut calculer $r_\theta(T_n)$ et montrer qu'il tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$;*
- *si ce n'est pas le cas, on peut tenter d'utiliser l'inégalité de Markov ou de Bienaymé-Tchebychev ;*
- *si toutes les méthodes précédentes échouent, on pourra tenter de calculer explicitement $P_\theta(|T_n - g(\theta)| \geq \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.*

Exercice. On suppose que la loi mère de l'échantillon est $\mathscr{U}([0,\theta])$. On considère les estimateurs de θ suivants :

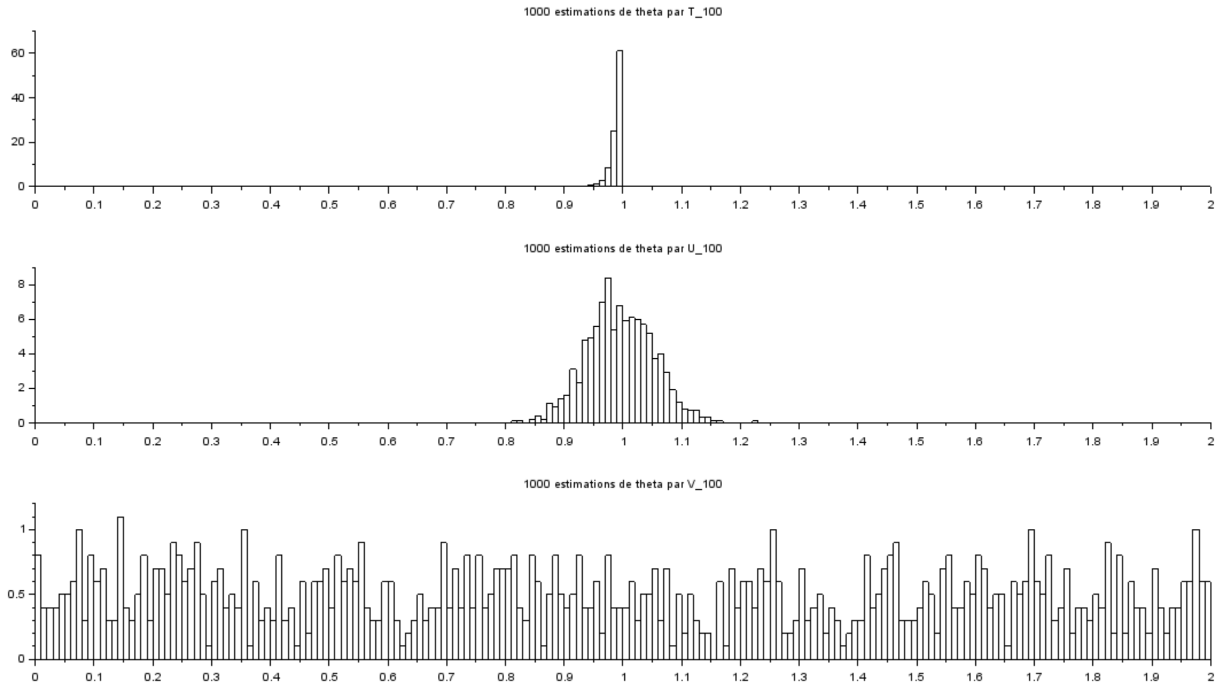
$$T_n = \max(X_1,\dots,X_n) \quad , \quad U_n = 2\overline{X_n} \quad \text{et} \quad V_n = 2X_n.$$

1. Montrer que $T_n = \max(X_1,\dots,X_n)$ est un estimateur convergent de θ.
2. Calculer le biais et le risque quadratique de U_n et de V_n. Ces estimateurs sont-ils convergents ?
3. Quel estimateur de θ privilégieriez vous ?

Exemple. On compare 1000 estimations de θ par T_{100}, U_{100} et V_{100} à l'aide du programme `Scilab` suivant (avec $\mathscr{U}([0,1])$ pour loi mère et donc $\theta_0 = 1$) :

```
n=100
E = grand(1000,n,"unf",0,1)
//1000 échantillons observés
T=[]//estimateur T_n
U=[]//estimateur U_n
V=[]//estimateur V_n
for k=1:1000
    T=[T,max(E(k,:))]
    U=[U,2*mean(E(k,:))]
    V=[V,2*E(k,n)]
end

subplot(3,1,1)
histplot(0:0.01:2,T)
title('1000 estimations de theta par T_100');
subplot(3,1,2)
histplot(0:0.01:2,U)
title('1000 estimations de theta par U_100');
subplot(3,1,3)
histplot(0:0.01:2,V)
title('1000 estimations de theta par V_100');
```



Histogramme des fréquences des estimations de θ.

Remarque. L'estimateur T_n est celui qui fournit les meilleurs estimations parmi les trois estimateurs de θ considérés. On peut encore l'améliorer en considérant $T'_n = \dfrac{n+1}{n} T_n$. En effet, on a vu que cet estimateur de θ est sans biais, et on a :

$$r_\theta(T'_n) = V_\theta(T'_n) = V_\theta\left(\frac{n+1}{n} T_n\right) = \frac{(n+1)^2}{n^2} V_\theta(T_n) = \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \theta^2 = \frac{1}{n(n+2)} \theta^2.$$

Ainsi on a $r_\theta(T'_n) < r_\theta(T_n) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} \theta^2$ pour tout $\theta \in \Theta$. T'_n est donc un meilleur estimateur de θ que T_n.