Chapitre 4

Espaces vectoriels

Compétences attendues.

- ✓ Montrer que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E.
- ✓ Montrer qu'une famille de vecteurs est libre.
- ✓ Montrer qu'une famille de vecteurs est une base d'un espace vectoriel.
- ✓ Déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel F de E.
- ✓ Déterminer le rang d'une matrice, d'une famille de vecteurs.
- ✓ Montrer que deux sous-espaces vectoriels $F, G \subset E$ sont en somme directe.
- ✓ Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans E.
- ✓ Montrer que p sous-espaces vectoriels sont en somme direct.

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en ECS2 au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Espaces et sous-espaces vectoriels

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$, n et p désignent des entiers naturels non nuls.

1.1 Espaces vectoriels

Définition.

Un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* est un ensemble E muni de deux lois :

- une loi $+$ d'addition de deux éléments de E,
- une loi $\cdot$ de multiplication d'un élément de $\mathbb{K}$ et d'un élément de E,

qui vérifient un certain nombre de propriétés de calcul.

Les éléments de E sont appelés *vecteurs* et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*.

Remarque. Il faut retenir qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est une structure qui permet :

- **d'additionner deux vecteurs,**

  Si u et v sont deux vecteurs, alors $u + v$ est un vecteur.

- **de multiplier un vecteur par un scalaire,**

  Si α est un scalaire et u est un vecteur, alors $\alpha \cdot u$ est un vecteur.

- et donc plus généralement **d'effectuer des combinaisons linéaires**.

  Si $u_1, \dots, u_p$ sont p vecteurs et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ p scalaires, alors

  $$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p$$

  est un vecteur, appelé *combinaison linéaire des vecteurs* $u_1, u_2, \dots, u_p$.

Dans toute la suite de ce chapitre, $(E, +, \cdot)$ désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Le saviez vous ?

La notion d'espace vectoriel a été introduite dans les années 1840 par Arthur Cayley (1821-1895) et Hermann Grassmann (1809-1877). La premier a considéré des n-uplets de réels et a défini dessus des opérations. Le second a fourni une théorie un peu confuse, incomprise de ses contemporains, mais qui avait l'avantage de ne pas dépendre d'une base.

Les espaces vectoriels ont été formalisés en 1888 par Giuseppe Peano (1858-1932) et sont devenus le cadre naturel de la géométrie, mais aussi de nombreux autres domaines. On peut concevoir des espaces vectoriels dont les éléments sont des fonctions, des polynômes ou des matrices. L'algèbre linéaire permet ainsi d'utiliser l'intuition géométrique dans des théories mathématiques dépourvues de support intuitif apparent.

1.2 Espaces vectoriels usuels

Il a été prouvé en première année que les ensembles suivants, munis de leurs lois usuelles sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites réelles, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, et plus généralement $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) de I dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Méthode.
Pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on ne reviendra jamais à la définition. On montrera qu'il est un sous-espace vectoriel de l'un des espaces vectoriels usuels précédents.

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que $F \subset E$ est un *sous-espace vectoriel* de E si :

(i) $F \neq \emptyset$; (ii) $\forall (u, v) \in F^2$, $u + v \in F$; (iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \lambda \cdot u \in F$.

Propriété 1 (Caractérisation d'un sous-espace vectoriel)

Une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

(i) $0_E \in F$;

(ii) $\forall (u, v) \in F^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

Exemples.

- $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (appelés *sous-espaces vectoriels triviaux* de E).
- L'ensemble des matrices diagonales est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes de degré $\leq n$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- Les ensembles $\mathscr{C}(I, R)$, $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}), \ldots$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$.

Méthode.
Pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E, on montrera les deux points de la caractérisation précédente. Pour le point (ii), on rédigera ainsi :

Soient $(u, v) \in F^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, montrons que $\lambda u + \mu v$ appartient à F. On a :

$$\lambda \cdot u + \mu \cdot v = \quad \ldots \quad \textit{(à compléter)}$$

On vérifie ensuite que $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ appartient bien à F en vérifiant toutes les conditions définissant F.
On conclut alors que F est un sous-espace vectoriel de E.

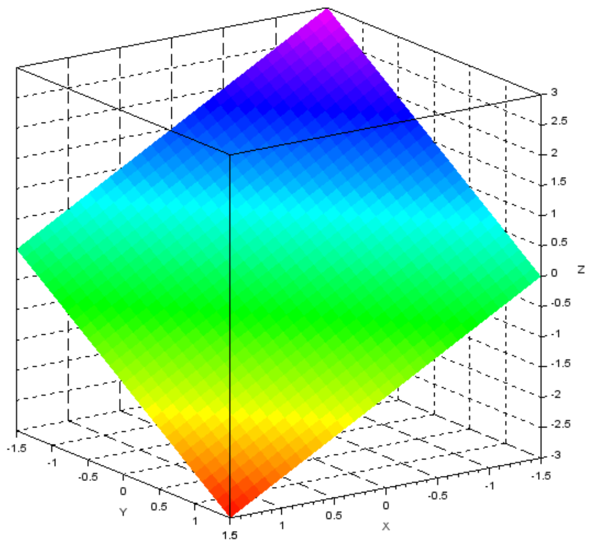
Exercice. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(X) - 2XP'(X) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice. Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de taille 2×2 est un espace vectoriel.

Propriété 2 (Structure des solutions d'un système linéaire homogène)

Soit $\mathscr{S}_0$ un système linéaire **homogène** de n équations à p inconnues. Alors l'ensemble E_0 de ses solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Exercice. Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.



Représentation du sous-espace F.

Propriété 3

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cap G$ est un s.e.v. de E.

Preuve.

$\square$

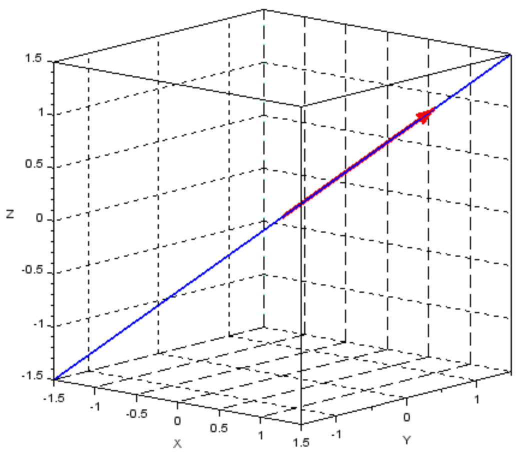
1.4 Sous-espaces engendrés par une famille de vecteurs

Définition.

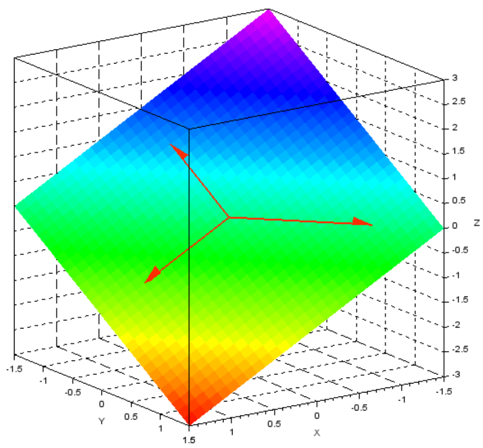
Soit $(u_1, \ldots, u_p) \in E^p$. On appelle *sous-espace vectoriel engendré par la famille* $(u_1, \ldots, u_p)$ et on note $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_p \in E$.
Autrement dit,

$$\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p) = \{\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_p,\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p\}.$$

Exemple. Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$. On a $\text{Vect}(u) = \{\alpha \cdot u,\ \alpha \in \mathbb{K}\}$. Il s'agit donc de l'ensemble des vecteurs colinéaires à u. Autrement dit, il s'agit de la *droite vectorielle* (passant par 0_E) dirigée par le vecteur u.



Représentation de la droite vectorielle $\text{Vect}((1,1,1))$.



Représentation du sous-espace $\text{Vect}((-1,1,0),(0,-1,1),(1,0,-1))$.

Propriété 4

- $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E contenant $u_1, \dots, u_p$, alors $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) \subset F$.
- Pour tout $i \neq j$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mu \in \mathbb{K}^*$, on a :

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p);$$

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_i + \lambda u_j, \dots, u_p) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_p);$$

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, \mu \cdot u_i, \dots, u_p) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_p).$$

Méthode.

Soit F un sous-espace vectoriel défini par (ou dont la définition se ramène à) un système d'équations linéaires. Pour écrire F sous forme d'un $\mathrm{Vect}(\dots)$ *:*

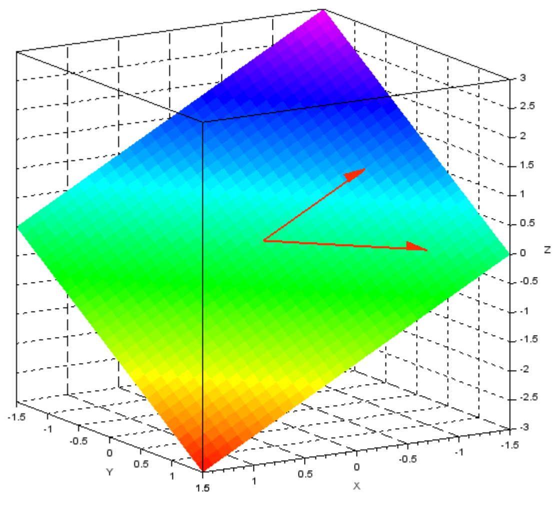
(i) on échelonne le système, et on identifie inconnues principales et inconnues paramètres ;

(ii) on substitue dans l'expression de F les inconnues principales par les inconnues paramètres. Les inconnues principales ne doivent plus apparaitre !

(iii) on factorise par les inconnues paramètres pour obtenir les vecteurs qui engendrent F.

Le nombre d'inconnues paramètres est le nombre de « degrés de liberté » pour les éléments de F, soit en d'autres termes sa dimension.

Exercice. Écrire $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$ comme sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.



F est engendré par $(-1, 1, 0)$ *et* $(-1, 0, 1)$.

Exercice. Écrire $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ comme sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2 Familles de vecteurs, bases, dimension

2.1 Familles libres

Définition.

Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ des éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On dit que $(u_1, \ldots, u_p)$ est une *famille libre* (ou que les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ sont *linéairement indépendants*) si :

$$\forall (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i = 0_E \ \Rightarrow\ (\forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i = 0) \right).$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est *liée* (ou que les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ sont *linéairement dépendants*), ce qui s'écrit :

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \neq (0, \ldots, 0),\ \lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E.$$

Remarques.

- Une famille d'un seul vecteur non nul est libre.
- Une famille de **deux** vecteurs non colinéaires (c'est-à-dire deux vecteurs non proportionnels) est libre.

Mise en garde.

Cela ne se généralise pas à trois vecteurs ou plus. Par exemple les vecteurs $(-1, 1, 0), (0, -1, 1)$ et $(1, 0, -1)$ sont deux à deux non colinéaires, et pourtant ils forment une famille liée puisque :

$$(-1, 1, 0) + (0, -1, 1) + (1, 0, -1) = (0, 0, 0).$$

Méthode.

Pour montrer qu'une famille est libre, on se ramène à la définition. On rédigera suivant le modèle suivant :

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ *tel que*

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p = 0. \qquad (*)$$

Montrons que $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0, \ldots,\ \alpha_p = 0$.

Pour cela, on écrit le système d'équations linéaires associé à $(*)$. *On conclut que* $(u_1, \ldots, u_p)$ *est une famille libre.*

Exercice. Montrer que la famille $((1, 1, -1), (-2, -1, 4), (3, 3, -4))$ est libre.

Exercice. Montrer que la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x})$ est libre.

Propriété 5

- Une famille de polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts est libre.
- Une famille de matrices-colonne ou de n-uplets échelonnée est libre.

Exemples.

- $(1, X+1, X^3 - X)$ est une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts. C'est donc une famille libre.
- $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille de matrices-colonne échelonnée. C'est donc une famille libre.

Propriété 6

- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

2.2 Familles génératrices

Définition.

Une famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite génératrice de E si :

$$E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p),$$

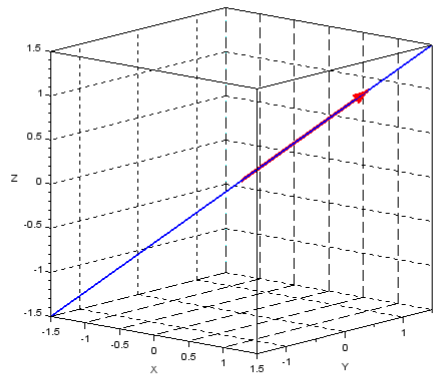
ce qui se réécrit :

$$\forall u \in E, \quad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i.$$

Remarque. La décomposition du vecteur u n'est pas nécessairement unique : il peut y avoir plusieurs combinaisons linéaires de $(u_1, \dots, u_p)$ égales au même vecteur.

Exercice. Montrer que la famille $((1,2),(2,-1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Exercice. Déterminer une famille génératrice de $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x-y=0,\ x-z=0\}$.



$((1,1,1))$ est une famille génératrice de F.

Propriété 7

Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Exemple. $((1,2),(2,-1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$, donc il en est de même de $((1,2),(2,-1),(3,1))$.

2.3 Bases

Définition.

Une famille de vecteurs de E libre et génératrice est appelée *base* de E.

Propriété 8

Une famille $\mathscr{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire de $(e_1,\ldots,e_n)$, c'est à dire :

$$\forall u \in E,\ \exists!(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K},\ u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i.$$

Les scalaires $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ sont appelés *coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$*.

Preuve.

□

Exercice. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u_1 = (0,1,1), u_2 = (1,0,1), u_3 = (1,1,0)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, et préciser les coordonnées d'un vecteur $u = (x, y, z)$ dans cette base.

Exemples.

- **Base canonique de $\mathbb{K}^n$.**

  Dans $\mathbb{K}^n$, on pose :

  $$e_1 = (1,0,0,\dots,0) \quad , \quad \dots \quad , \quad e_i = (0,\dots,0,\underset{i^{eme}\ \text{position}}{1},0,\dots,0) \quad , \quad \dots \quad , \quad e_n = (0,0,\dots,0,1)$$

  La famille $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

- **Base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.**

  Pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ d'indice (i,j) : $E_{i,j}$ est la matrice n'ayant que des 0, sauf un 1 en position (i,j).

  La famille $(E_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, dite base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- **Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.**

  Dans $\mathbb{K}_n[X]$, $(1, X, \dots, X^n)$ est une base (dite base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$).

2.4 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

- Soit $u \in E$, et $(m_1, \dots, m_n)$ les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$, c'est à dire l'unique n-uplet de scalaires tel que :
$$u = m_1 \cdot e_1 + \cdots + m_n \cdot e_n.$$
On appelle *matrice des coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$* la matrice colonne notée $M_{\mathscr{B}}(u)$ de ces coefficients dans la base $\mathscr{B}$:
$$M_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}.$$

- Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p) \in E^p$, une famille de vecteurs de E.
On appelle *matrice de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathscr{B}$* et on note $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = M_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_p)$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}$ dont la j-ème colonne est $M_{\mathscr{B}}(u_j)$:
$$M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} u_1 & \cdots & u_j & \cdots & u_p \end{array} & \\ \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,j} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & \cdots & m_{2,j} & \cdots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,j} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array} \quad \text{où} \quad u_j = \sum_{k=1}^{n} m_{i,j} e_i \text{ pour tout } 1 \leq j \leq p.$$

Exemples.

- Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = I_n$.
- Considérons $E = \mathbb{K}^3$, $\mathscr{B}$ sa base canonique et $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (2, 0, 1)$ vecteurs de E.
$$M_{\mathscr{B}}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice. Soit $\mathscr{B} = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$ et $u = (2, 0, 4)$. Déterminer $M_{\mathscr{B}}(u)$.

Exercice. Écrire la matrice des polynômes $P_i(X) = (X+a)^i$ pour tout $0 \leq i \leq n$ dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$.

2.5 Dimension d'un espace vectoriel

Définition.

On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie de E.

Théorème 9

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors :

- il existe une base de E ;
- toutes les bases de E ont le même cardinal.

Le cardinal d'une base est appelé *dimension de* E et noté $\dim(E)$.

Exemples. $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$, $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$.

Théorème 10

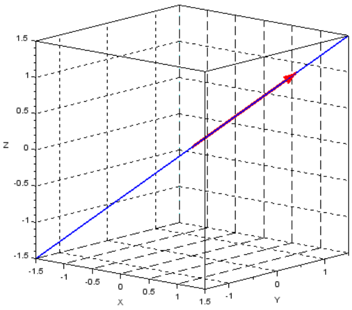
Soit E un espace vectoriel de dimension finie de E. Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E, et $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E. Alors on peut compléter $\mathscr{L}$ à l'aide de vecteurs de $\mathscr{G}$ pour former une base de E.

Corollaire 11

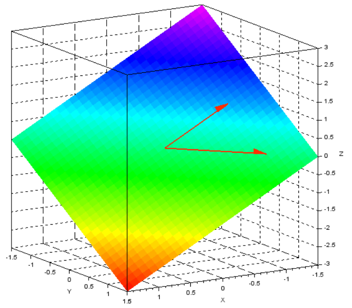
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$. De plus, $F = E$ si et seulement si $\dim(F) = \dim(E)$.

Remarque. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On est dans l'un des cas suivants :

- $\dim(F) = 0$, et alors $F = \{0_E\}$;
- $\dim(F) = 1$, et alors F est une droite vectorielle ;
- $\dim(F) = 2$, et alors F est un plan vectoriel ;
- $\dim(F) = 3$, et dans ce cas $F = \mathbb{R}^3$.



Sous-espace vectoriel de dimension 1, dont une base est constituée du vecteur en rouge.



Sous-espace vectoriel de dimension 2, dont une base est constituée des deux vecteurs en rouges.

Définition.

Un *hyperplan de E* est un sous-espace vectoriel H de E de dimension $\dim(E) - 1$.

Exemples.

- Un hyperplan de $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1, en d'autres termes une droite vectorielle $\mathrm{Vect}(a)$ avec $a \neq 0_E$.
- Un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. En d'autres termes, il s'agit d'un plan vectoriel $\mathrm{Vect}(a, b)$ avec a, b des vecteurs non colinéaires.

Propriété 12

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Alors :

- toute famille libre de E est de cardinal inférieur ou égal à n ;
- une famille libre de cardinal n est une base de E ;
- toute famille génératrice de E est de cardinal supérieur ou égal à n ;
- une famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.

Méthode.

Il est souvent pénible d'établir qu'une famille est génératrice, alors que la liberté est souvent plus simple à montrer. Aussi, autant que possible, lorsqu'il s'agit de prouver qu'une famille est une base d'un espace vectoriel E, on montrera qu'elle est libre et contient $\dim(E)$ vecteurs. Ceci nécessite bien entendu de connaître la dimension de E.

Exercice. Montrer que $((1,3,1),(1,0,-2),(0,1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2.6 Rang d'une famille de vecteurs, rang d'une matrice

Définition.

Soit $(u_1,\ldots,u_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle *rang de* $(u_1,\ldots,u_p)$ et on note $\mathrm{rg}(u_1,\ldots,u_p)$ la dimension de $\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_p)$.

Propriété 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dimension finie n. Soit $(u_1,\ldots,u_p)\in E^p$. On a :

- $\mathrm{rg}(u_1,\ldots,u_p)\leq \min(p,n)$.
- La famille $(u_1,\ldots,u_p)$ est libre si et seulement si $\mathrm{rg}(u_1,\ldots,u_p)=p$.
- La famille $(u_1,\ldots,u_p)$ est génératrice de E si et seulement si $\mathrm{rg}(u_1,\ldots,u_p)=n$.

Définition.

Si $M\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle *rang de M*, et on note $\mathrm{rg}(M)$ le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exemple. La matrice $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ 1 & 2 & \ldots & n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & \ldots & n\end{pmatrix}$ est de rang 1 : en effet, toutes ses colonnes sont proportionnelles.

Propriété 14

Si $M\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}(M)=rg({}^tM)$.

Remarque. Comme conséquence, le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille de ses vecteurs lignes.

Propriété 15

(1) Le rang d'une matrice A est invariant lorsqu'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes de A.

(2) Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice qu'on ramène par opérations élémentaires sur les lignes à une matrice échelonnée par lignes A'.

Le rang de A est le nombre de pivots non nuls dans A' (i.e. le rang du système linéaire homogène associé à A).

Preuve.

(1) Soit A' la matrice obtenue à partir de A en faisant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $i \neq j$. On a :

$$\mathrm{Vect}(L_1, \dots, L_i + \lambda L_j, \dots, L_n) = \mathrm{Vect}(L_1, \dots, L_i, \dots, L_n)$$

Donc $\mathrm{rg}(A') = \dim\left(\mathrm{Vect}(L_1 + \lambda L_i, \dots, L_n)\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}(L_1, \dots, L_n)\right) = \mathrm{rg}(A)$.

On montrerait de même que le rang est invariant pour les autres opérations élémentaires $L_i \leftrightarrow L_j$ et $L_i \leftarrow \mu L_i$ ($\mu \neq 0$).

(2) D'après la question précédente, on sait que le rang de A est égal au rang de la matrice échelonnée A'. On cherche donc le rang de A'. On a

$$A' = \begin{pmatrix} m'_{1,j_1} & * & & & & \\ 0 & & m'_{2,j_2} & * & & \\ & & 0 & & & \\ & & & & m'_{r,j_r} & * \\ & & & & 0 & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Par opérations élémentaires sur les lignes, on peut se ramener à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * & \vdots & \\ & & 0 & \dots & 0 & * \\ & & & & 1 & * \\ & & & & 0 & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Or on a alors :

$$Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\ \\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}*\\0\\ \\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\1\\ \\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}*\\ *\\ \\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}*\\ \vdots\\ *\\0\end{pmatrix}\right) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\ \\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}*\\ \vdots\\ *\\0\end{pmatrix}, \dots\right) = Vect\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\ \\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\1\\0\end{pmatrix}}_{r \text{ vecteurs}}\right)$$

Cet espace est donc de dimension r. On peut donc conclure que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A') = r$, le nombre de pivots dans la matrice échelonnée.

□

Méthode.

Pour calculer le rang d'une matrice A, on échelonne la matrice par opérations ***sur les lignes****. Le rang de A est alors le nombre de pivots non nuls de la matrice échelonnée obtenue.*

Propriété 16

Si $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie, et si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors le rang de $\mathscr{F}$ est égal au rang de la matrice $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.

Méthode.

Pour déterminer le rang d'une famille $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie, et pour extraire de $\mathscr{F}$ une base de $\text{Vect}(\mathscr{F})$*, on procèdera ainsi :*

(i) On écrit la matrice de $\mathscr{F}$ dans une base $\mathscr{B}$ de E ;

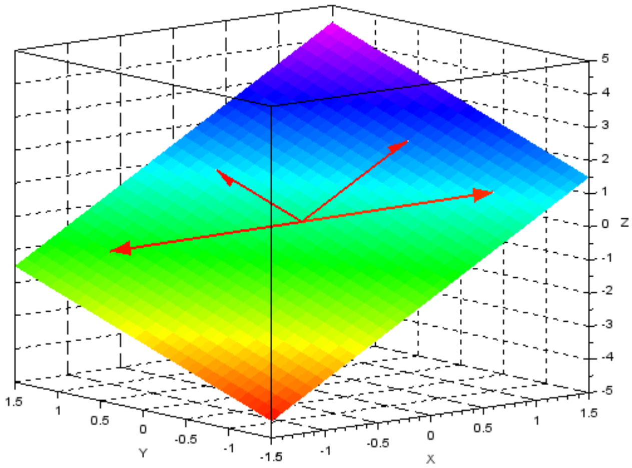
(ii) On se ramène à une matrice échelonnée par ***opérations élémentaires sur les lignes*** *:*

$$\begin{pmatrix} m'_{1,j_1} & \cdots & & & & \\ 0 & & m'_{2,j_2} & \cdots & & \\ & & 0 & & & \\ & & & & m'_{r,j_r} & \cdots \\ & & & & 0 & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} ;$$

(iii) Le rang de $\mathscr{F}$ est égal à r, le nombre de pivots non nuls dans la matrice échelonnée par lignes ;

(iv) La sous-famille $(u_{j_1}, \dots, u_{j_r})$, dont les vecteurs correspondent aux colonnes des pivots (inconnues principales), est libre de cardinal $r = \text{rg}(\mathscr{F})$.

Exercice. Soient $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (-1, 1, -1)$, $u_3 = (0, 1, 1)$, $u_4 = (1, 0, 2)$. Déterminer le rang de $\mathscr{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, ainsi qu'une base de $\text{Vect}(\mathscr{F})$.



Représentation de la famille de vecteurs $\mathscr{F}$ et de Vect($\mathscr{F}$).

Propriété 17

Supposons que E est de dimension n, et soit $\mathscr{B}$ une base de E.

$$(u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de } E \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \text{ est inversible.}$$

Preuve.

□

Méthode.

Pour montrer qu'une famille $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension n, on pourra procéder ainsi :

- *On écrit la matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$ de E ;*
- *On montre que la matrice $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ est de rang n (et donc inversible) à l'aide du pivot de Gauss.*

3 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels

3.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition.

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on appelle somme de F et G et on note $F + G$ l'ensemble :

$$F + G = \{x + y,\ x \in F,\ y \in G\}.$$

Ainsi, on a :

$$z \in F + G \quad \Leftrightarrow \quad \exists (x, y) \in F \times G, \quad z = x + y.$$

Propriété 18

$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve.

□

Propriété 19

Si F et G sont de dimension finie, alors $F + G$ est de dimension finie et on a :

$$\dim(F + G) \leq \dim(F) + \dim(G).$$

Preuve.

□

Remarque. On peut montrer plus précisément que :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \qquad \textit{(formule de Grassmann)}$$

Le saviez vous ?

Hermann Grassmann (1809-1877) est l'un des grands mathématiciens « malheureux » du XIX^e siècle. En 1839 dans sa thèse sur la *Théorie des flots et des marées*, il établit les fondements de la théorie des espaces vectoriels et de l'algèbre linéaire. Ces travaux, bien que révolutionnaires, n'auront que peu d'échos chez ses contemporains. Le rapporteur de sa thèse ayant à lire un essai remarquablement long, en bâcle la lecture en quatre jours et en rate complètement l'importance fondamentale. En 1844, son ouvrage majeur *La science des grandeurs extensives ou la théorie de l'espace*, première publication importante dans le cadre de la théorie des espaces vectoriels, passe aussi pratiquement inaperçu.

Ce n'est que bien plus tard que viendra la reconnaissance pour Grassmann. D'abord par Hamilton qui lui rend hommage dans son ouvrage de 1853 sur les quaternions. C'est ensuite Hermann Hankel et Félix Klein, enthousiasmés par ses théories, qui le recommandent à l'Académie des sciences de Göttingen en 1871. Ses travaux sont reconnus par Peano en 1888, trente ans après leur première publication.

3.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition.

On dit que la somme $F+G$ est *directe* si pour tout $z \in F+G$, la décomposition $z = x+y$ avec $x \in F$ et $y \in G$ est unique, c'est-à-dire :

$$\forall z \in F+G, \quad \exists!(x,y) \in F \times G, \quad z = x+y.$$

On note alors $F \oplus G$.

Propriété 20 (Caractérisation des sommes directes)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors il y a équivalence entre :

(1) F et G sont en somme directe ;

(2) $F \cap G = \{0_E\}$;

(3) $\forall (x,y) \in F \times G,\ x+y = 0_E \Rightarrow x = y = 0_E$.

Preuve.

(1) $\Rightarrow$ (2) On suppose que la somme est directe. Soit $z \in F \cap G$. Montrons que $z = 0_E$. On a :

$$z = \underbrace{z}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{z}_{\in G}.$$

Par unicité de l'écriture dans une somme directe, on en déduit que $z = 0_E$. Ainsi on a $F \cap G \subset \{0_E\}$. L'autre inclusion est immédiate puisque $F \cap G$ est un s.e.v.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$, et soit $(x,y) \in F \times G$ tel que $x+y = 0_E$. Alors on a :

$$\underbrace{x}_{\in F} = \underbrace{-y}_{\in G}.$$

Ainsi $x, y \in F \cap G = \{0_E\}$, donc $x = y = 0_E$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Montrons que $F+G$ est directe. Prenons pour cela $z \in F+G$. Il existe $(x, y) \in F \times G$ tel que :

$$z = x + y \tag{$*$}$$

On veut montrer que cette décomposition est unique. Prenons donc $(x', y') \in F \times G$ tel que

$$z = x' + y' \tag{$**$}$$

et montrons que $x = x'$, $y = y'$. On a en faisant $(*) - (**)$:

$$0_E = \underbrace{(x - x')}_{\in F} + \underbrace{(y - y')}_{\in G}.$$

En utilisant (3), on en déduit que $x - x' = 0_E$ et $y - y' = 0_E$, soit encore $x = x'$ et $y = y'$.

$\square$

Propriété 21 (Caractérisation en dimension finie)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ des bases de F et G. Il y a équivalence entre

(1) F et G sont en somme directe ;

(2) la concaténation de $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ est une base de $F+G$;

(3) $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Preuve.

$\square$

3.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont *supplémentaires dans* E si $E = F \oplus G$. Ainsi, on a la caractérisation :

$$E = F \oplus G \quad \Leftrightarrow \quad \forall z \in E,\ \exists!(x, y) \in F \times G,\ z = x + y.$$

Propriété 22 (Caractérisation des supplémentaires)

$$E = F \oplus G \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

Théorème 23 (Caractérisations en dimension finie)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous espaces vectoriels de E. Il y a équivalence entre

(1) $E = F \oplus G$ (2) $\begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{cases}$ (3) $\begin{cases} F + G = E \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{cases}$

Preuve.

(1) $\Rightarrow$ (2) Si $F + G$ est directe, alors $F \cap G = \{0_E\}$, et on a $\dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G) = \dim(E)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) On a $F \cap G = \{0_E\}$, donc la somme $F + G$ est directe. On en déduit que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G)$. Donc $F + G = E$.

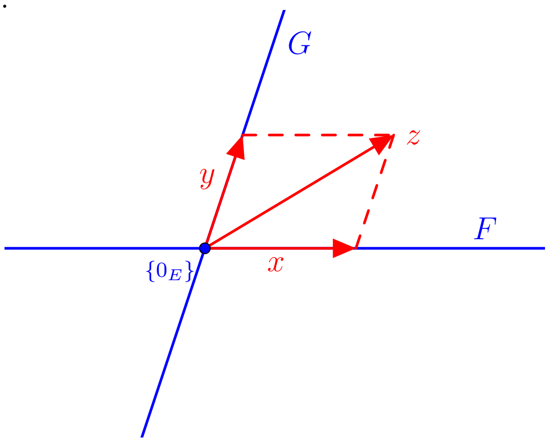
(3) $\Rightarrow$ (1) On a déjà que $F + G = E$. Reste à montrer que la somme $F + G$ est directe. Or c'est équivalent à la deuxième condition $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$. D'où le résultat.

□

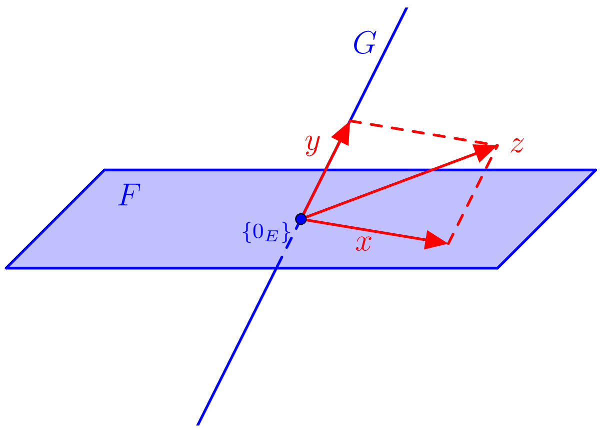
Méthode.

Pour montrer que deux espaces F et G sont supplémentaires, on privilégie la caractérisation (2) *qui est en général plus simple à établir.*

Exemple. On représentera schématiquement des espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$ comme suit.



Représentation schématique de $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.



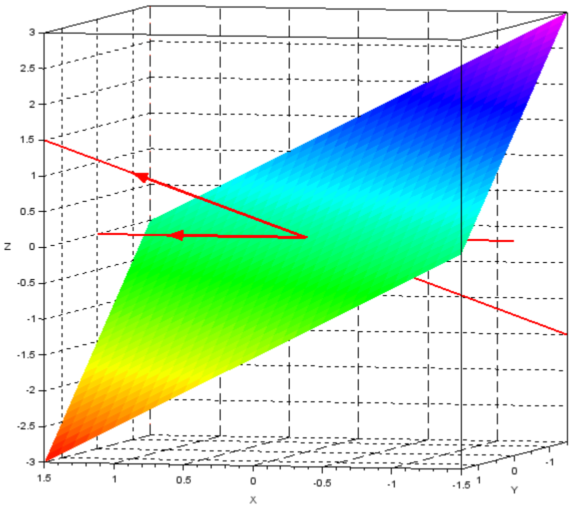
Représentation schématique de $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \quad ; \quad G = \mathrm{Vect}((1,1,1)) \quad \text{et} \quad H = \mathrm{Vect}((1,0,0)).$$

a) Montrer que F et G sont supplémentaires.

b) Même question avec F et H.



Représentations de F, G et H.

Remarque. Comme on le voit dans le dernier exemple, un sous-espace vectoriel a en général plusieurs supplémentaires dans E. On parle donc d'**un** supplémentaire et non du supplémentaire.

Théorème 24

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G des sous-espaces vectoriels de E de bases respectives $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$. Alors on a :

$$E = F \oplus G \quad \Leftrightarrow \quad \text{la concaténation de } \mathscr{B}_F \text{ et } \mathscr{B}_G \text{ est une base de } E.$$

On dit alors que la base de E ainsi obtenue en concaténant $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ est *adaptée à la décomposition en somme directe* $E = F \oplus G$.

Preuve. Notons $\mathscr{B}$ la famille obtenue en concaténant $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$.

$\Rightarrow$ Supposons que $E = F \oplus G$. F et G sont en somme directe, donc la famille $\mathscr{B}$ obtenue en concaténant $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ est une base de $F+G$. Comme de plus $E = F+G$, c'est donc une base de E.

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que $\mathscr{B}$ est une base de E. Alors $F+G$ contient une famille génératrice de E, donc $E = F+G$. De plus $\mathscr{B}$ est une base de $F+G$, ce qui est équivalent à F et G en somme directe.

□

Exercice. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons $e_1 = (1,1,-3)$, $e_2 = (-1,0,4)$ et $e_3 = (1,4,1)$, et posons $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \text{Vect}(e_3)$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Propriété 25

Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

Preuve. Comme F est un sous-espace d'un E de dimension finie, F est de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. C'est une famille libre de E, donc on peut la compléter en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E (par le théorème de la base incomplète). On a $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, posons $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. On déduit de la propriété précédente qu'alors on a :

$$F \oplus G = E.$$

□

Propriété 26

Soit H un sous-espace vectoriel d'un espace E de dimension finie.

H est un hyperplan de E si et seulement s'il existe dans E une droite vectorielle supplémentaire de H.

Preuve.

□

3.4 Somme de p sous-espaces vectoriels

Définition.

Soit $(F_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On appelle *somme des* $F_1,\dots,F_p$ et on note $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ l'ensemble :

$$\sum_{i=1}^{p} F_i = \{x_1+x_2+\cdots+x_p,\ x_i\in F_i\}.$$

Ainsi on a :

$$x\in\sum_{i=1}^{p} F_i \quad\Leftrightarrow\quad \exists(x_1,\dots,x_p)\in F_1\times\cdots\times F_p,\quad x=x_1+\cdots+x_p.$$

Propriété 27

$\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve. Même preuve que dans le cas $p=2$.

□

Propriété 28

Si les F_i sont de dimension finie, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ est de dimension finie et

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right)\leq\sum_{i=1}^{p}\dim(F_i).$$

Preuve. On prouve, comme dans le cas $p=2$, que la concaténation de bases des F_i est génératrice de $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ pour conclure. □

3.5 Somme direct de p sous-espaces vectoriels

Définition.

Soit $(F_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On dit que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ est *directe*, et on note $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, si :

$$\forall x\in\sum_{i=1}^{p} F_i,\quad \exists!(x_1,\dots,x_p)\in F_1\times\cdots\times F_p,\quad x=x_1+\cdots+x_p.$$

Propriété 29

La somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si on a :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, \quad x_1 + \cdots + x_p = 0_E \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0_E.$$

Preuve. La preuve est identique au cas $p = 2$.

□

Théorème 30

Soit $F_1, \dots, F_p$ p sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, et $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p$ des bases respectives de ces espaces.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) les sous-espaces vectoriels $(F_i)_{i \in \{1,\dots,p\}}$ sont en somme directe ;

(2) la concaténation des $\mathscr{B}_i$ est une base de $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$;

(3) $\displaystyle\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

Preuve. La preuve est similaire au cas $p = 2$.

□