Chapitre 5

Variables aléatoires discrètes

Compétences attendues.

- ✓ Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire discrète.
- ✓ Utiliser la formule de l'espérance totale.
- ✓ Reconnaitre et utiliser une loi usuelle.

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en ECS2 au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Généralités sur les variables aléatoires réelles

Dans tout le chapitre, les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1.1 Définitions

Propriété 1

Si $S \subset \mathscr{P}(\Omega)$, alors il existe une plus petite (au sens de l'inclusion) tribu contenant S. On la note $\mathscr{A}(S)$, et on l'appelle *tribu engendrée par S*.

Autrement dit, si $\mathscr{A}$ est une tribu telle que $S \subset \mathscr{A}$, alors $\mathscr{A}(S) \subset \mathscr{A}$.

Définition.

On appelle *tribu borélienne de* $\mathbb{R}$ la tribu engendrée par tous les intervalles de la forme $]-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$. On la note $\mathscr{B}$. Ses éléments sont appelés les *boréliens*.

Remarque. On vérifie que tous les intervalles sont dans $\mathscr{B}$. Par exemple :

- $]x, +\infty[= \mathbb{R} \backslash]-\infty, x] \in \mathscr{B}$;
- $]-\infty, x[= \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\infty, x - \frac{1}{n}\right] \in \mathscr{B}$;
- $[x, y] =]-\infty, y] \backslash]-\infty, x[\in \mathscr{B}$. En particulier $\{x\} \in \mathscr{B}$, $\{x_i, i \in I\} = \bigcup_{i \in I} \{x_i\} \in \mathscr{B}$, ...

Définition.

Une *variable aléatoire réelle* est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [X \leq x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{A}.$$

Propriété 2

Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, on a :

$$[X \in B] = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\} \in \mathscr{A}.$$

Remarque. En particulier si $B =]-\infty, x[$, $[x, +\infty[$, $[x, y]$, ... alors les ensembles $[X < x]$, $[X \geq x]$, $[x \leq X \leq y]$, ... sont des évènements.

Propriété 3

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles, λ un réel quelconque. Alors $X + Y$, XY et λX sont des variables aléatoires réelles.

Propriété 4

Soit $A \in \mathscr{A}$. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A \end{cases}$ est une variable aléatoire réelle.

Preuve.

$\square$

Remarques.

- La variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(A)$.
- Il est très rare qu'on vous demande de montrer qu'une application est bien une variable aléatoire. Si tel est le cas, il faut se ramener à la définition comme on vient de le faire pour $\mathbb{1}_A$.

Définition.

On appelle *tribu engendrée par* X, et on note $\mathscr{A}_X$, la tribu engendrée par les évènements $[X \leq x]$. On a $\mathscr{A}_X \subset \mathscr{A}$. $\mathscr{A}_X$ représente l'information fournie par X.

Exemple. Pour tout $A \in \mathscr{A}$, on a $\mathscr{A}_{\mathbb{1}_A} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$.

1.2 Fonction de répartition

Définition.

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle *fonction de répartition de* X, ou *loi de* X, la fonction $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leq x).$$

Propriété 5

Soit X une variable aléatoire réelle, F_X sa fonction de répartition. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On a :

$$P(X > a) = 1 - F(a) \qquad ; \qquad P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Théorème 6 (Caractérisation d'une fonction de répartition)

Une application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X si et seulement si elle satisfait les trois points suivants :

- F est croissante sur $\mathbb{R}$;
- F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

De plus on a l'égalité :

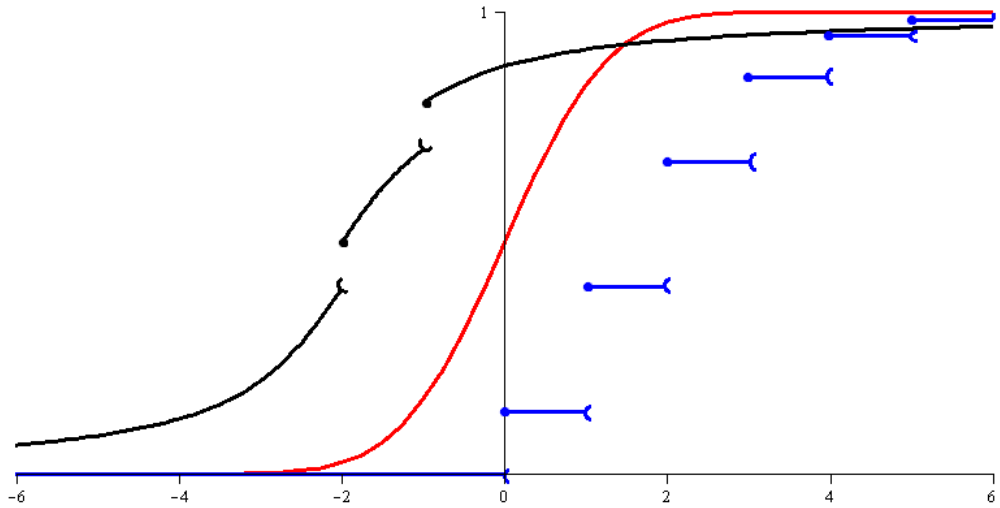
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F(x) - \lim_{t\to x^-} F(t).$$

Propriété 7

Soit F une fonction de répartition d'une variable aléatoire X.
Alors F est continue à gauche (et donc continue) sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini ou dénombrable de points x_i en lesquels on a seulement la continuité à droite :

$$\lim_{x\to x_i^-} F(x) < F(x_i) = \lim_{x\to x_i^+} F(x).$$

Exemple. Les trois applications suivantes sont des fonctions de répartitions de variables aléatoires réelles.



En effet, elles sont toutes les trois croissantes, continues sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre dénombrable de points où elles sont seulement continues à droite, et elles sont bien de limite 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$.

2 Rappels sur les variables aléatoires discrètes

2.1 Définitions

Définition.

Une variable aléatoire réelle X est dite *discrète* lorsque son *support* $X(\Omega)$, i.e. l'ensemble des valeurs prises par X, est dénombrable.

On dit plus précisément que X est une variable *discrète finie* lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini et *discrète infinie* lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable.

Exemples.

- Si $A \in \mathscr{A}$, alors $\mathbb{1}_A$ est discrète finie car $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0, 1\}$
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, alors X est discrète infinie car $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0; 1)$, alors X n'est pas discrète car $X(\Omega) = \mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (on peut montrer qu'on ne peut pas "numéroter" les éléments de $\mathbb{R}$).

Toutes les variables aléatoires considérées dans la suite de ce chapitre seront supposées discrètes.

2.2 Loi d'une variable aléatoire discrète

Propriété 8

Une application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X si et seulement si elle satisfait les points suivants :

(i) F est croissante sur $\mathbb{R}$;

(ii) F est en escalier et continue à droite ;

(iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{\substack{z \in X(\Omega) \\ z \leqslant x}} P(X = z)$$

Exercice. Soit X la variable donnant la valeur obtenue en lançant un dé. Tracer sa fonction de répartition.

Remarque. À partir de la fonction de répartition F_X, on peut retrouver :

- $X(\Omega)$: c'est l'ensemble des points de discontinuité de F_X ;
- $P(X=x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$: c'est la hauteur du saut à l'abscisse x.

Et réciproquement à partir de $X(\Omega)$ et de $P(X=x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$, on peut reconstruire la loi F_X de X. Ainsi on a la

Propriété 9

Soit X une variable aléatoire discrète. Alors la loi de X est entièrement caractérisée par la donnée :

- du support $X(\Omega)$ de X ;
- de tous les $P(X=x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

Méthode.

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète X, on ne donne généralement pas la fonction de répartition, mais on explicitera plus simplement :

(i) le support $X(\Omega)$ de la variable X ;

(ii) la valeur de $P(X=x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Exemple. Soit X la variable aléatoire donnant la valeur obtenue lors d'un lancer de dé. La loi de X est donnée par :

$$X(\Omega) = [\![1,6]\!] \quad \text{et} \quad P(X=i) = \frac{1}{6} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq 6.$$

Propriété 10

Si X est une variable aléatoire discrète, alors $([X=x])_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. En particulier, on a :

(1) $\forall x \in X(\Omega),\ P([X=x]) \geq 0$;

(2) la famille $(P([X=x]))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable et sa somme vaut 1.

Propriété 11 (Caractérisation d'une loi de probabilité)

Soit I un ensemble fini ou dénombrable, et $(p_k)_{k\in I}$ une famille de réels satisfaisant :

(1) $\forall k \in I,\quad p_k \geq 0$;

(2) la famille $(p_k)_{k\in I}$ est sommable et sa somme vaut 1.

Alors la famille $(p_k)_{k\in I}$ définit une *loi de probabilité*, c'est à dire qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et une variable aléatoire discrète X sur cet espace telle que :

$$X(\Omega) = I \quad \text{et} \quad \forall\, k \in I,\ P([X=k]) = p_k.$$

Méthode.
Pour montrer que $(p_k)_{k\in I}$ définit une loi de probabilité, il faudra vérifier que :

- *si $I = [\![0, n]\!]$,*
  (i) $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $p_k \geq 0$,
  (ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$.
- *si $I = \mathbb{N}$,*
  (i) $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $p_k \geq 0$,
  (ii) $\sum p_k$ *converge (absolument) et sa somme est égale à* 1.

Exercice. Justifier l'existence d'une variable aléatoire Y satisfaisant $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y = k) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

3 Moments d'une variable aléatoire discrète

Notation. Dans toute la suite, X désigne une variable discrète. Lorsque c'est nécessaire, on fixera une numérotation de son support $X(\Omega)$ qu'on notera :

- $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ si X est discrète fini,
- $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ si X est discrète infinie.

3.1 Espérance d'une variable aléatoire discrète

Définition.

On dit qu'une variable aléatoire discrète X admet une *espérance* si la série $\sum x_k P([X = x_k])$ converge **absolument**[1]. Dans ce cas, on appelle *espérance de X*, notée $E(X)$, la somme de cette série :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P([X = x]).$$

Interprétation. Lorsqu'elle existe, l'espérance $E(X)$ est la moyenne des valeurs x prises par la variable aléatoire X pondérées par les probabilités $P([X = x])$.

[1] En d'autres termes, la famille $(xP(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, et sa somme ne dépend alors pas de l'ordre de sommation.

Le saviez vous ?

Après avoir entendu parler de la correspondance de Blaise Pascal et Pierre de Fermat au sujet du *problème des partis* lors d'un voyage à Paris en 1655, le mathématicien hollandais Christiaan Huygens (1629 - 1695) publie le premier livre sur le calcul des probabilités dans les jeux de hasard en 1657. Il y introduit comme notion fondamentale la « valeur de l'espérance » d'une situation d'incertitude. Pour nommer ce nouveau concept, il hésite entre les mots latins *spes* et *expectatio* signifiant respectivement *espoir* et *espérance*. Quelques années plus tard, il définit l'espérance de vie.

Christiaan Huygens est également célèbre pour la découverte de Titan, plus grand satellite de Saturne, et pour son invention de l'horloge à pendule qui améliora la précision des horloges existantes de 15 minutes à 15 secondes par jour.

Propriété 12

Si X est une variable aléatoire réelle presque surement constante égale à $c \in \mathbb{R}$ (c'est à dire $P(X = c) = 1$), alors X admet une espérance et on a $E(X) = c$.

Exercice. Calculer l'espérance des variables $\mathbb{1}_A$, X et Y définies précédemment.

Remarque. Les variables aléatoires discrètes finies ont toujours une espérance. Par contre, il existe des variables aléatoires discrètes infinies qui n'ont pas d'espérance.

Propriété 13 (Linéarité de l'espérance)

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes **admettant une espérance**, et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et on a :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

Corollaire 14

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance. Alors pour tous réels a et b, la variable aléatoire $aX + b$ admet aussi une espérance et on a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Preuve.

$\square$

Propriété 15 (Existence d'une espérance par domination)

Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $|X| \leq Y$ presque sûrement.
Si Y admet une espérance alors X admet aussi une espérance et on a $|E(X)| \leqslant E(Y)$.

Exercice. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique, et soit $Y = \sqrt{X}$. Montrer que Y admet une espérance.

Propriété 16

Soit X et Y deux variables aléatoires admettant une espérance.

- Si $X \geq 0$ presque sûrement, alors $E(X) \geq 0$ (*positivité de l'espérance*).
- Si $X \leq Y$ presque sûrement, alors $E(X) \leq E(Y)$ (*croissance de l'espérance*).

3.2 Théorème de transfert

Théorème 17 (*de transfert pour les variables discrètes*)

Soit X une variable aléatoire discrète et g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors la fonction $g(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire discrète. De plus, on a :

- Si X est une variable aléatoire discrète **finie** :

  La variable aléatoire $g(X)$ possède une espérance, et on a :

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) P([X = x]) \quad \text{(somme finie).}$$

- Si X est une variable aléatoire discrète **infinie** :

  La variable aléatoire $g(X)$ possède une espérance si et seulement si la série $\sum g(x_k) P([X = x_k])$ converge **absolument**. Dans ce cas, on a :

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) P([X = x]) \quad \text{(série absolument convergente).}$$

Méthode.
Le théorème de transfert permet de calculer l'espérance de $Y = g(X)$ en ne connaissant que la loi de X.

Exercice. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $Y = e^X$ et $Z = \dfrac{1}{1+X}$. Montrer que Y et Z admettent une espérance et calculer-la.

3.3 Moments d'ordre supérieur, variance

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète, et $r \in \mathbb{N}^*$.

On dit que X *admet un moment d'ordre* r si X^r possède une espérance. Par le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si la série $\sum x_k^r P([X = x_k])$ converge **absolument**. On note alors $m_r(X) = E(X^r)$ le *moment d'ordre* r de X :

$$m_r(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r P([X = x]).$$

Propriété 18

Si X admet un moment d'ordre r, alors il admet un moment à tout ordre $s \leq r$.

Preuve.

□

Remarque. En particulier, si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance.

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance.

On dit que X admet une *variance* si $(X - E(X))^2$ admet une espérance. D'après le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si la série $\sum (x_k - E(X))^2 P(X = x_k)$ converge **absolument**. On appelle alors *variance de* X, notée $V(X)$, la somme de cette série :

$$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P([X = x]).$$

Interprétation. La variance d'une variable aléatoire discrète X mesure la dispersion des valeurs prises par X par rapport à $E(X)$. En particulier, c'est un réel positif ou nul.

Propriété 19 (de la variance)

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. Pour tout réel a et b, la variable aléatoire $aX + b$ admet aussi une variance et on a :

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Mise en garde.

La variance n'est pas linéaire : $V(aX) = a^2 V(X)$!

Remarque. Puisque $(X - E(X))^2 \geq 0$, on a en cas d'existence :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) \geq E(0) = 0.$$

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. On appelle *écart-type de* X, et on note $\sigma(X)$, le réel défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Propriété 20

Soit X une variable aléatoire discrète possédant une variance. Alors on a :

$$X \text{ est constante presque surement} \quad \Leftrightarrow \quad V(X) = 0.$$

Théorème 21 (*Formule de Koenig-Huygens*)

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance.
X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2, et on a alors :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Preuve.

□

Méthode.
Dans la quasi-totalité des cas, on utilise la formule de Koenig-Huygens pour calculer une variance et non la définition qui entraîne des calculs en général plus compliqués.

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète.

- X est dite *centrée* si X admet une espérance et si $E(X) = 0$.
- X est dite *centrée réduite* si X admet une variance et $E(X) = 0$, $V(X) = 1$.

Propriété 22

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. Alors on a :

- $X - E(X)$ est centrée ;
- $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite. On l'appelle *la variable aléatoire centrée réduite associée à X.*

4 Espérance totale

Rappel. Soit A un évènement de probabilité non nulle. Pour tout évènement $B \in \mathscr{A}$, on définit la *probabilité de B sachant A* par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Alors P_A est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Définition.

Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$, et X une variable aléatoire réelle discrète.
On appelle *loi de X sachant A* la loi de X pour la probabilité P_A, c'est à dire la donnée de tous les couples $(x, P_A(X = x))$ pour tout $x \in X(A)$.

Exercice. Le nombre de clients qui entrent dans un restaurant un soir de semaine est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque client choisit, indépendamment du choix de ses voisins, de la viande avec probabilité p et du poisson avec la probabilité $1-p$. On note Y le nombre de clients qui choisissent de la viande.

a) Quelle est la loi de Y sachant $[X=n]$?

Définition.

On dit que X *admet une espérance sachant* A (ou *conditionnellement à* A) si X admet une espérance pour la probabilité P_A, c'est à dire si la série $\sum x_k P_A(X=x_k)$ converge absolument. Dans ce cas, on appelle *espérance de* X *sachant* A, notée $E(X|A)$ la somme de cette série :

$$E(X|A) = \sum_{x \in X(A)} x P_A(X=x).$$

Remarques.

- Très souvent, la loi de X sachant A est usuelle et l'espérance conditionnelle en découle immédiatement.
- On peut choisir indifféremment de sommer sur $X(\Omega)$ ou $X(A)$ pour calculer $E(X|A)$, les probabilités $P_A(X=x)$ pour $x \notin X(A)$ étant nulles.

Exercice. Reprenons l'exemple des clients du restaurant.

b) Déterminer l'espérance de Y sachant $[X=n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 23 (*Formule de l'espérance totale*)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements tel que $P(A_n) \neq 0$ pour tout n.

Une variable discrète X admet une espérance si et seulement si :

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X|A_n)$ existe ;

(2) $\sum_n P(A_n)E(|X||A_n)$ converge (absolument).

Dans ce cas, on a alors :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)E(X|A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{x\in X(\Omega)} x P_{A_n}(X=x)P(A_n).$$

Preuve. On fait la preuve dans le cas où X est finie et I fini.

$\square$

Remarques.

- En pratique, les variables X considérées sont toujours positives, et donc on remplacera $E(|X||A_i)$ par $E(X|A_i)$.
- Si X est finie, elle admet une espérance et la formule de l'espérance totale s'applique alors sans se soucier des problèmes de convergence.
- Si le système complet d'évènements (A_n) est fini, alors X admet une espérance si et seulement si toutes les espérances conditionnelles $E(X|A_n)$ existent.

Exercice. Reprenons l'exemple des clients du restaurant.

c) En déduire que Y admet une espérance que l'on calculera.

Remarques.

- Lorsqu'on utilise la formule de l'espérance totale, on précisera **toujours** au préalable le système complet d'événements qu'on utilise.
- La formule de l'espérance totale est encore valable pour un système presque complet d'évènements.

5 Lois discrètes usuelles

5.1 Expériences associées aux différentes lois classiques.

- **Lois issues d'un tirage unique :**
  - **Loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$:** succès (valeur 1) ou échec (valeur 0) lors d'un tirage déséquilibré.
  - **Loi uniforme $\mathscr{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$:** valeur obtenue lors d'un tirage équiprobable dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N.
- **Lois issues d'une répétition de tirages avec remise :**
  - **Loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$:** nombre de succès lors d'une répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre.
  - **Loi géométrique $\mathscr{G}(p)$:** temps d'attente du premier succès lors d'une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre.

La loi de Poisson ne correspond pas à une situation typique mais à une loi limite (de la loi binomiale). Elle se rencontre lorsque la réalisation d'un évènement est rare sur un grand nombre d'observations. Lorsqu'il faut l'utiliser, l'énoncé l'indique explicitement.

Le saviez vous ?

Nicolas de Condorcet (1743 - 1794) était un mathématicien mais aussi un économiste et un homme politique. Auteur de nombreux écrits sur le calcul de probabilités, il montre comment les mathématiques peuvent aider à la gestion d'une démocratie. Il cherche par exemple à déterminer la composition optimale d'un jury d'assises permettant de minimiser la probabilité d'une erreur de jugement. Il se penche également sur les systèmes de vote, et montre l'impossibilité de choisir un candidat qui soit meilleur face à tout autre.

Le mathématicien et physicien français Denis Poisson (1781 - 1840) maîtrise toutes les notions d'analyse connues à son époque et les applique dans des domaines très variés comme la géométrie, la mécanique ou l'électrostatique. En 1837, il change de centre d'intérêt et publie un ouvrage intitulé *Recherche sur la probabilité des jugements*. On y trouve la loi qui porte désormais son nom, et qu'il obtient comme limite de la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ avec np constant. Curieusement, il s'appuie aussi sur des considérations sur des jugements pour produire des résultats de portée bien plus large.

5.2 Simulation en Scilab

La commande `grand(q,r,loi)` permet de simuler une matrice $q \times r$ dont les entrées suivent la loi spécifiée. Le paramètre loi doit prendre l'une des valeurs suivantes :

- `'uin',a,b` pour $\mathscr{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$;
- `'bin',n,p` pour $\mathscr{B}(n,p)$;
- `'poi',`λ pour $\mathscr{P}(\lambda)$;
- `'geom',p` pour $\mathscr{G}(p)$.

Par exemple, `grand(10,10,'bin',20,0.1)` retourne une matrice 10×10 dont les nombres ont été tirés aléatoirement suivant $\mathscr{B}(20, 0.1)$. Il n'y a pas de commande pour $\mathscr{B}(p)$, on utilisera que $\mathscr{B}(p) = \mathscr{B}(1,p)$.

5.3 Table des lois discrètes usuelles

Lois discrètes usuelles

	Nom	Notation	Support $X(\Omega)$	Valeur de $P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$	Espérance	Variance
Lois finies	Loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$ $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathscr{U}(\{1,\dots,n\})$	$\{1,\dots,n\}$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
	Loi uniforme sur $\{a,a+1,\dots,b\}$ $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a \leq b$	$\mathscr{U}(\{a,\dots,b\})$	$\{a,\dots,b\}$	$\dfrac{1}{b-a+1}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$
	Loi de Bernoulli de paramètre p $p \in]0,1[$	$\mathscr{B}(p) = \mathscr{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
	Loi binômiale de paramètres n et p $n \in \mathbb{N}^*,\ p \in]0,1[$	$\mathscr{B}(n,p)$	$\{0,1,\dots,n\}$	$\dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Lois infinies	Loi géométrique de paramètre p $p \in]0,1[$	$\mathscr{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
	Loi de Poisson de paramètre λ $\lambda \in]0,+\infty[$	$\mathscr{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ