Chapitre 6

Applications linéaires

1 Applications linéaires **2**
- 1.1 Définitions 2
- 1.2 Noyaux, images 3
- 1.3 Image d'une base par une application linéaire 5
- 1.4 Rang d'une application linéaire 5
- 1.5 Isomorphismes 7
- 1.6 Projecteurs 8

2 Matrices et applications linéaires **12**
- 2.1 Matrice d'une application linéaire 12
- 2.2 Matrices de passage 14
- 2.3 Changement de bases 15
- 2.4 Retour sur le rang d'une matrice 17
- 2.5 Retour sur les projecteurs 19

3 Polynômes d'un endomorphisme **20**
- 3.1 Définition et propriétés 20
- 3.2 Polynômes annulateurs 21

4 Sous-espaces stables **22**

Compétences attendues.

- ✓ Montrer qu'une application est linéaire, calculer son noyau, son image et son rang.
- ✓ Montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme.
- ✓ Montrer qu'une application linéaire p est un projecteur, et savoir l'identifier en calculant $\mathrm{Ker}(p), \mathrm{Im}(p)$.
- ✓ Écrire la matrice d'une application linéaire f dans une base $\mathscr{B}$.
- ✓ Écrire une matrice de passage, et l'utiliser dans les formules de changement de bases.
- ✓ Montrer qu'un polynôme est annulateur d'une application linéaire.
- ✓ Montrer qu'un sous-espace est stable par une application linéaire.

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en ECS2 au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Applications linéaires

Dans toute la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E et F désigneront des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1.1 Définitions

Définition.

Une application $f : E \to F$ est dite *linéaire* si elle satisfait :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in E^2, \quad f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y).$$

On notera $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Remarque. On a $f(0_E) = f(0 \cdot 0_E) = 0 \cdot f(0_E) = 0_F$. L'image du vecteur nul 0_E par une application linéaire est donc le vecteur nul 0_F.

Exemples.

- Id_E est linéaire. Plus généralement, toute homothétie, c'est à dire toute application de la forme $\lambda \cdot Id_E$, est linéaire.
- La transposition $t : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(K),\ A \mapsto {}^tA$ est linéaire.
- L'application $f_a : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K},\ P \mapsto P(a)$ d'évaluation en $a \in \mathbb{K}$ d'un polynôme est linéaire.
- La dérivation $D : \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $D(f) = f'$ est linéaire.
- L'intégration $I : \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $I(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est linéaire.

Méthode.

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est linéaire, on reviendra à la définition. On rédigera ainsi :

Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(u, v) \in E^2$, on a :

$$f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \qquad \dots \qquad \stackrel{?}{=} \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v).$$

Exercice. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$ est linéaire.

Mise en garde.

Dire qu'une application est « stable par combinaisons linéaires » ne veut rien dire. Un sous-espace vectoriel est stable par combinaisons linéaires, une application linéaire est juste... linéaire !

Propriété 1

- $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.

Définition.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

- Si $E = F$, on dit que f est un *endomorphisme*, et on notera $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Si $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une *forme linéaire*.

Exemples.

- Les applications Id_E, transposition et f définies précédemment sont des endomorphismes de E, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.
- L'application d'évaluation $f_a : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$.
- L'application trace $Tr : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Le saviez vous ?

Le mathématicien italien Giuseppe Peano (1858 - 1932) est le premier à donner, en 1888, une définition satisfaisante d'un espace vectoriel, ceci à partir des travaux de Grassman. Il introduit les applications linéaires et montre que cette théorie ne se réduit pas à la dimension finie en citant l'exemple des polynômes.

On ne retient plus guère aujourd'hui de lui que sa courbe remplissant un carré. Peano est pourtant l'un des pionniers de la méthode axiomatique moderne : il introduit les entiers naturels à l'aide d'axiomes, c'est-à-dire de propositions non démontrées utilisées comme point de départ de l'arithmétique. On lui doit également les symboles $\cap, \cup, \in$ ou $\exists$ qu'il introduit dans son *Formulaire mathématique* de 1895.

1.2 Noyaux, images

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

Définition.

On appelle *noyau de* f, et on note $\operatorname{Ker}(f)$, l'ensemble :

$$\operatorname{Ker}(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0_F\}.$$

Propriété 2

- $\operatorname{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Méthode.
Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, on revient à la définition. On rédigera comme suit :

$$\text{Soit } x \in E. \text{ On a : } \quad f(x) = 0_F \Leftrightarrow \qquad \ldots$$

On sera alors amené à résoudre un système linéaire dont l'ensemble des solutions est $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice. Déterminer le noyau de $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$.

Définition.

On appelle *image de* f, et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble :

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F,\ \exists x \in E \ :\ f(x) = y\}.$$

Propriété 3

- $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

1.3 Image d'une base par une application linéaire

Théorème 4

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de F.

Il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(e_i) = x_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

De plus, on a :

- f est injective si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre.
- f est surjective si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice.
- f est bijective si et seulement si $\mathscr{F}$ est une base.

Corollaire 5

- Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base.
- Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

Corollaire 6

Soit $f : E \to F$ une application linéaire, et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On a :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Preuve.

□

1.4 Rang d'une application linéaire

Définition.

On suppose E de dimension finie, et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie.
On appelle *rang de f*, et on note $\mathrm{rg}(f)$, l'entier :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Remarque. Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors le rang de f est le rang de la famille de vecteurs $\mathscr{F} = (f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Théorème 7 *(du rang)*

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, E supposé de dimension finie. Alors on a :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(Im(f)).$$

Mise en garde.
Attention, il s'agit d'une égalité de dimension. En général, on n'a pas $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice. Déterminer le rang et l'image de $f : (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, z - x)$.

Propriété 8

Soit E de dimension finie, et $\varphi : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire **non nulle**. Alors $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E (c'est à dire un sous-espace de dimension $\dim(E) - 1$).

Preuve.

$\square$

Pour plus de détails sur les liens entre formes linéaires et hyperplans

☞ **Complément de cours 2. Formes linéaires et hyperplans.**

Corollaire 9

On suppose que E et F sont de **même dimension finie**, et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Il y a équivalence entre :

(1) f est bijective ; (2) f est injective ; (3) f est surjective.

Mise en garde.

Attention à bien préciser que $\dim(E) = \dim(F)$ avant d'utiliser ce résultat. C'est faux en dimension infinie : on peut montrer par exemple que la dérivation $D : f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto f' \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est surjective mais pas injective.

Preuve. Tout d'abord, on a par définition que $(1) \Rightarrow (2)$ et $(1) \Rightarrow (3)$.

Montrons $(2) \Rightarrow (1)$: comme f est injective, on a $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et donc $\dim \mathrm{Ker}(f) = 0$. Par le théorème du rang, on obtient :

$$\dim(E) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f)$$

Ainsi $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim(E) = \dim(F)$ et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F. Donc $\mathrm{Im}(f) = F$ et f est surjective. Étant injective également, elle est bijective.

On montre de manière analogue que $(3) \Rightarrow (1)$. $\square$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-2x - y + 2z, -3x - 2y + 2z, -2x)$. Montrer que f est bijective.

1.5 Isomorphismes

Définition.

On dit qu'une application $f : E \to F$ est un *isomorphisme* si f est linéaire et bijective.
Si de plus $E = F$, on dit que f est un *automorphisme de* E.

Propriété 10

On suppose que E et F sont de **même dimension finie**, et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Il y a équivalence entre :

(1) f est bijective ; (2) $\exists g \in \mathscr{L}(F,E),\ g \circ f = Id_E$; (3) $\exists h \in \mathscr{L}(F,E),\ f \circ h = Id_F$.

De plus, on a alors $f^{-1} = g = h$.

Mise en garde.

Attention ici aussi à bien dire que $\dim(E) = \dim(F)$. C'est faux là aussi en dimension infinie : par exemple pour D la dérivation et I l'intégration, on a $D \circ I = Id$. Pourtant il est facile de voir que D n'est pas injective et que I n'est pas surjective.

Propriété 11

On suppose que E est de dimension finie n, et soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors l'application :

$$\Phi_{\mathscr{B}} : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \mapsto & M_{\mathscr{B}}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Preuve.

$\square$

Propriété 12

On suppose E et F de dimension finie. Alors il existe un isomorphisme $f : E \to F$ si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Preuve. Supposons que $\dim(E) = \dim(F) = n$, et soient $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ des bases de E et F. D'après la propriété précédente, les applications

$$\Phi_{\mathscr{B}_E} : E \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \ \text{ et } \ \Phi_{\mathscr{B}_F} : F \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

sont des isomorphismes. D'où par composition,

$$\Phi_{\mathscr{B}_F}^{-1} \circ \Phi_{\mathscr{B}_E} : E \xrightarrow{\Phi_{\mathscr{B}_E}} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \xrightarrow{\Phi_{\mathscr{B}_F}^{-1}} F$$

est un isomorphisme de E sur F. Donc E et F sont bien isomorphes.

Réciproquement s'il existe un isomorphisme $f : E \to F$, alors

$$\dim(E) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = 0 + \dim F = \dim(F).$$

□

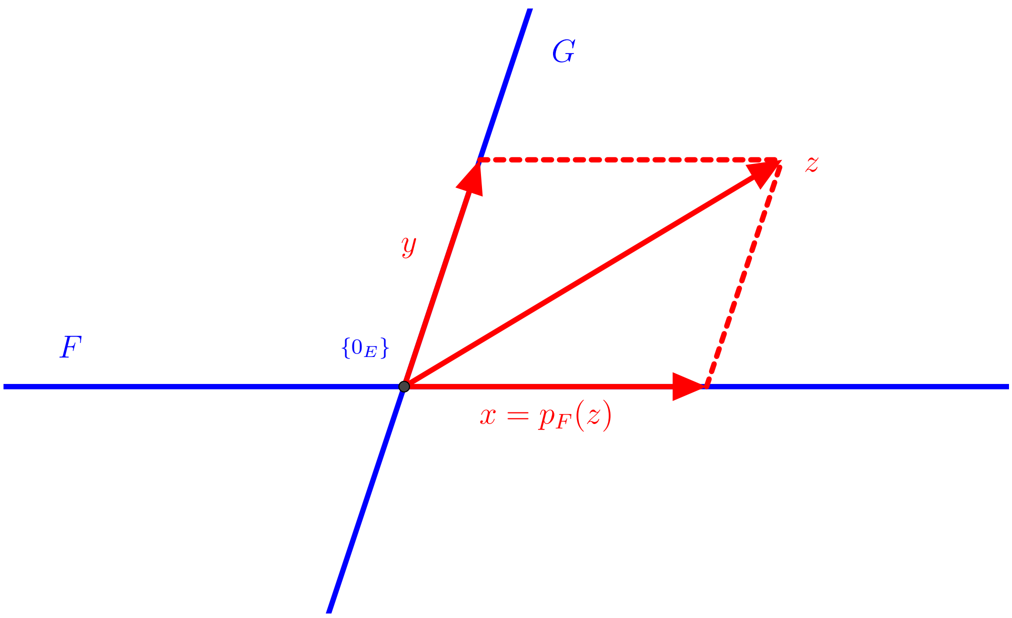
1.6 Projecteurs

Définition.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Pour tout $z \in E$, il existe donc un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$.

- Le vecteur x est appelé *la projection de z sur F parallèlement à G*, et noté $p(z)$.
- L'application $p : E \to E$ ainsi définie est appelée le *projecteur sur F parallèlement à G*

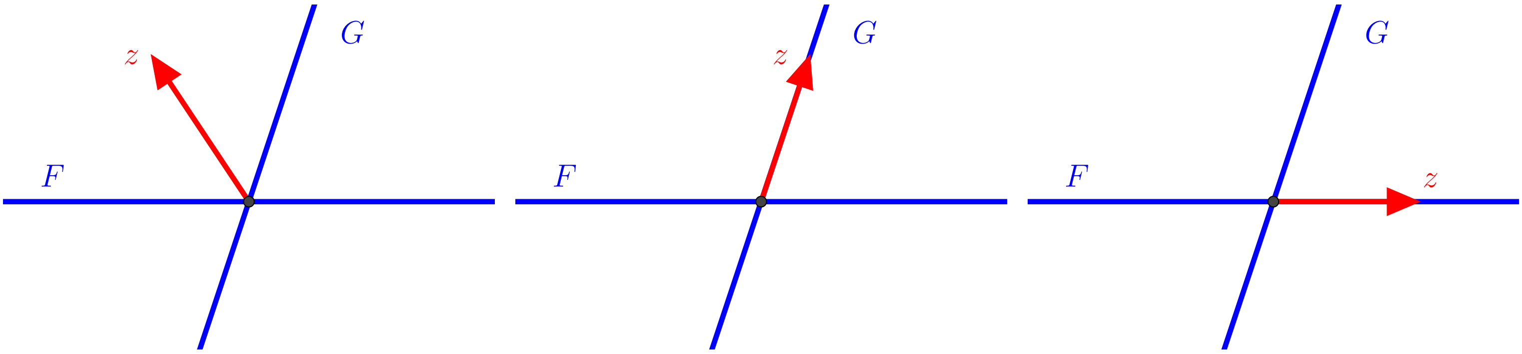
Illustration graphique. Pour projeter z sur F, on trace la parallèle à G passant par l'extrémité de z. La projection x de z sur F est l'intersection de cette parallèle à G avec F.



Projection sur F parallèlement à G.

Exemple. Notre ombre est la projection de notre silhouette sur le sol parallèlement aux rayons du soleil.

Exemple. Déterminer graphiquement la projection de z sur F parallèlement à G dans les cas suivants.



Propriété 13

(1) p est linéaire ;

(2) $p \circ p = p$;

(3) $Ker(p) = G$ et $Im(p) = F = Ker(p - Id_E)$. Ainsi on a :

$$\forall y \in G,\ p(y) = 0_E \quad \text{et} \quad \forall x \in F,\ p(x) = x.$$

Preuve.

□

Remarque. Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, alors $q = Id_E - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F. En effet si $z \in E$, alors en notant $(x, y) \in F \times G$ tels que $z = x + y$, on a :

$$q(z) = z - p(z) = x + y - x = y.$$

On a les relations :

$$p + q = Id_E \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0.$$

On dit que p et q sont les *projecteurs associés à la décomposition $E = F \oplus G$.*

Propriété 14

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. Alors on a :

$$p \text{ est un projecteur} \quad \Leftrightarrow \quad p \circ p = p.$$

Plus précisément, on a $E = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Ker}(p)$ et p est le projecteur sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p)$.

Preuve. On a déjà montré l'implication $\Rightarrow$. Montrons la réciproque. Pour cela, commençons par montrer que $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$.

Analyse. Soit $z \in E$, on cherche $(x, y) \in \operatorname{Ker}(p) \times \operatorname{Im}(p)$ tel que $z = x + y$.

Puisque $y \in \operatorname{Im}(p)$, il existe $t \in E$ tel que $y = p(t)$. On a alors en composant par p

$$p(z) = p(x) + p(y) = p(y) = p \circ p(t) = p(t) = y.$$

Ainsi $y = p(z)$ et $x = z - p(z)$.

Synthèse. Soit $z \in E$, posons $y = p(z)$ et $x = z - p(z)$. Montrons que :

$$z = x + y, \quad x \in \operatorname{Ker}(p) \quad \text{et} \quad y \in \operatorname{Im}(p).$$

Tout est clair, sauf peut-être $x \in \operatorname{Ker}(p)$:

$$p(x) = p(z - p(z)) = p(z) - p \circ p(z) = 0_E.$$

Conclusion. Ainsi on a bien $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$.

Soit $z \in E$, on a $z = \underbrace{p(z)}_{\in \operatorname{Im}(p)} + \underbrace{(z - p(z))}_{\in \operatorname{Ker}(p)}$. Si q est le projecteur sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p)$, on a $q(z) = p(z)$. Ainsi $q = p$, c'est à dire p est le projecteur sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p)$. □

Définition.

Soit F et G des sous-espaces supplémentaires de E, et soit p et q les projecteurs associés. On appelle *symétrie par rapport à F dans la direction de G* l'endomorphisme $s = p - q = Id_E - 2q$.

Pour une étude des propriétés d'une symétrie vectorielle,

☞ **Complément de cours 3. Symétries.**

2 Matrices et applications linéaires

2.1 Matrice d'une application linéaire

Définition.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie p et n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
On appelle *matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$*, notée $M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, la matrice $(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le n}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ème colonne contient les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$:

$$M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \quad \text{où} \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i.$$

Remarque. $\dim(E)$ = nombre de colonnes de la matrice, $\dim(F)$ = nombre de lignes de la matrice.

Cas d'un endomorphisme. $E = F$, on prend alors la même base au départ et à l'arrivée $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, et pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, on note plus simplement $M_{\mathscr{B}}(f) = M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Exemple. On a $M_{\mathscr{B}}(Id_E) = I_n$.

Exercice. Écrire la matrice de $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Propriété 15

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$.

- Si $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors on a :
$$M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \cdot M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) + \mu \cdot M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g).$$
- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$, alors on a :
$$M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = M_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f).$$

Corollaire 16

Soient E et F de dimension finie n et p, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases de E et F.

- L'application $\Phi_{\mathscr{B},\mathscr{C}} : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- Si E et F sont tous deux de dimension finie, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est aussi de dimension finie et on a :
$$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Preuve.

$\square$

Propriété 17

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension n munis respectivement des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On a :

$$f \text{ est un isomorphisme} \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \text{ est inversible.}$$

On a alors $\left(M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)^{-1} = M_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right)$.

Preuve.

$\square$

Propriété 18

Supposons E et F de dimension finie, et considérons $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases respectives de E et F. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $x \in E$. Notons alors :

- A la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$;
- X la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$;
- Y la matrice colonne des coordonnées de $y = f(x)$ dans la base $\mathscr{C}$.

Alors on a :

$$Y = AX.$$

2.2 Matrices de passage

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, alors $M_{\mathscr{B}}(f)$ et $M_{\mathscr{B}'}(f)$ sont a priori deux matrices différentes. Nous expliquons ici comment passer de l'une à l'autre.

Définition.

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
On appelle *matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$* la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$.

Plus précisément, si on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ et $P = (p_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, on a

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_j & \cdots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,j} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,j} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,j} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \quad \text{où} \quad e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i$$

Remarque. Par définition, on a $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = M_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id_E)$ puisque :

$$M_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id_E) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} Id(e'_1) & \cdots & Id(e'_j) & \cdots & Id(e'_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

Exercice. Considérons la famille $\mathscr{B} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(1,2,1,0),(1,3,3,1))$. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, et écrire la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_c$ à la base $\mathscr{B}$.

Propriété 19

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E de dimension finie. Alors $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible, d'inverse :

$$(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}.$$

Preuve.

$\square$

2.3 Changement de bases

Propriété 20

Supposons E de dimension finie, et soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit $x \in E$. Notons :

- X la matrice de x dans la base $\mathscr{B}$;
- X' la matrice de x dans la base $\mathscr{B}'$;
- P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Alors on a :

$$X = PX'.$$

Preuve.

$\square$

Théorème 21 (*de changement de bases*)

Supposons E de dimension finie, et soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Notons :

- A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$;
- A' la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$;
- P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Alors on a :

$$A' = P^{-1}AP.$$

En particulier, les matrices A et A' sont semblables.

Preuve.

□

Exercice. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Écrire explicitement $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Soit $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, avec $\varepsilon_1 = (1, 0, 1)$, $\varepsilon_2 = (-1, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice de f dans $\mathscr{C}$.
4. En déduire la matrice de f^n dans $\mathscr{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.4 Retour sur le rang d'une matrice

Propriété 22

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F. Le rang de $M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est égal au rang de l'application linéaire f.

Preuve.

□

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *application linéaire canoniquement associé à A* l'application :

$$\varphi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & A \cdot X \end{array} \right.$$

.

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, φ_A l'application linéaire canoniquement associée à A.

- On appelle *noyau de A*, et on note $\mathrm{Ker} A$, le noyau de φ_A. Ainsi on a :

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ A \cdot X = 0_{n,1}\}.$$

- On appelle *image de A*, en note $\mathrm{Im} A$, l'image de φ_A. Ainsi on a :

$$\mathrm{Im}(A) = \{Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ Y = A \cdot X\}$$

Propriété 23

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, φ_A l'application linéaire canoniquement associée à A.

(1) La matrice dans les bases canoniques de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de φ_A coïncide avec A.

(2) On a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\varphi_A)$.

(3) Théorème du rang : $\quad p = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A)$.

Preuve.

□

Exercice. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Ker}(A), \mathrm{Im}(A), \mathrm{rg}(A)$.

Propriété 24

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a les équivalences suivantes :

$$A \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(A) = \{0_{n,1}\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(A) = n.$$

Preuve. Puisque A est carrée, $\varphi_A \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ et sa matrice dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est A, de sorte que :

$$\begin{aligned} A \text{ inversible } &\Leftrightarrow \varphi_A \text{ bijective } \Leftrightarrow \varphi_A \text{ injective } (\Leftrightarrow \mathrm{Ker} A = \{0_{n,1}\}) \\ &\Leftrightarrow \varphi_A \text{ surjective } (\Leftrightarrow \mathrm{Im} A = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = n. \end{aligned}$$

□

Propriété 25

(1) Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases distinctes.

(2) Deux matrices semblables ont même rang.

Preuve.

□

Mise en garde.
La réciproque est fausse : deux matrices de même rang ne sont pas forcément semblables. Par exemple, les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont de rang 2 mais elles ne sont pas semblables puisque la seule matrice semblable à I_2 est I_2.

2.5 Retour sur les projecteurs

On suppose que E est de dimension finie n.

Propriété 26

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est un projecteur de rang r ;

(2) il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle

$$M_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r \text{ fois}}) = A_r;$$

(3) $M_{\mathscr{B}}(f)$ est semblable à A_r.

Preuve.

□

Remarque. Il est donc aisé d'écrire la matrice d'un projecteur f dans une base adaptée à la somme directe $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Et pour obtenir la matrice de f dans une autre base, il suffit d'appliquer les formules de changement de bases.

3 Polynômes d'un endomorphisme

3.1 Définition et propriétés

Définition.

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme à cœfficients dans $\mathbb{K}$, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
On note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k = a_d f^d + \cdots + a_1 f + a_0 Id_E$$

où $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$, $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ termes}}$.

Exemple. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $P = X^2 + 3X - 10$. Alors on a $P(f) = f^2 + 3f - 10Id_E$.

Mise en garde.

Le terme constant a_0 dans P devient $a_0 Id_E$ dans $P(f)$.

Propriété 27

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On a

(1) $(\alpha P + \beta Q)(f) = \alpha P(f) + \beta Q(f)$; (2) $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

Remarque. Il est important de bien identifier les objets mathématiques concernés :

$$(\underbrace{P \times Q}_{\text{produit de polynômes}})(f) = \underbrace{P(f) \circ Q(f)}_{\text{composition d'endomorphismes}}$$

Mise en garde.

Ne pas confondre $P(f)(x)$ et $P(f(x))$:

$$P(f(x)) = a_n(f(x))^n + \cdots + a_1 f(x) + a_0$$

n'a pas de sens (pas de produit dans E). Alors que $P(f)(x)$ est l'évaluation en $x \in E$ de l'endomorphisme $P(f) \in \mathscr{L}(E)$.

Propriété 28

(1) Les endomorphismes $P(f)$ et $Q(f)$ commutent : $P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$.

(2) Si A est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ alors $P(A)$ est la matrice de $P(f)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Preuve.

(1) On a : $P(f) \circ Q(f) \overset{\text{prop. 26}}{=} (P \times Q)(f) \overset{\times \text{ commut. dans } \mathbb{K}[X]}{=} (Q \times P)(f) \overset{\text{prop. 26}}{=} Q(f) \circ P(f)$

(2) Notons $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$. On a :

$$\begin{aligned} P(A) &= a_n A^n + \ldots a_1 A + a_0 I_n = a_n M_{\mathscr{B}}(f)^n + \cdots + a_1 M_{\mathscr{B}}(f) + a_0 M_{\mathscr{B}}(Id_E) \\ &\overset{\text{prop. 14}}{=} a_n M_{\mathscr{B}}(f^n) + \cdots + a_1 M_{\mathscr{B}}(f) + a_0 M_{\mathscr{B}}(Id_E) = M_{\mathscr{B}}(a_n f^n + \cdots + a_1 f + a_0 Id_E) \\ &= M_{\mathscr{B}}(P(f)). \end{aligned}$$

□

3.2 Polynômes annulateurs

Définition.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que P est un *polynôme annulateur de* f lorsque $P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exemple. Polynôme annulateur :

- d'une homothétie λId_E de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$:
- d'un projecteur p :

Propriété 29

P est un polynôme annulateur de f si et seulement si P est un polynôme annulateur de sa matrice dans une base quelconque.

Preuve. Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $A = M_{\mathscr{B}}(f)$. Alors d'après la propriété 27, $P(A) = M_{\mathscr{B}}(P(f))$. On a donc :

$$P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow M_{\mathscr{B}}(P(f)) = 0_n \Leftrightarrow P(A) = 0_n.$$

□

Propriété 30

(1) On suppose que E est de **dimension finie**.
Tout endomorphisme de E admet un polynôme annulateur non nul.

(2) Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet un polynôme annulateur non nul.

Preuve.

□

Propriété 31

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, et P un polynôme annulateur de f.
Si $P(0) \neq 0$, alors f est inversible. De plus f^{-1} est un polynôme en f.

4 Sous-espaces stables

Définition.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est dit *stable par* f si :

$$\forall x \in F,\ f(x) \in F.$$

Exemples.

- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On a $f(\{0_E\}) = \{0_E\}$ et $f(E) \subset E$. Ainsi, les sous-espaces vectoriels $\{0_E\}$ et E sont stables par f.
- Soit $E = \mathbb{R}[X]$, $f : P \to P'$, et $F = \mathbb{R}_n[X]$.

  Si $\deg(P) \leq n$, alors $\deg(f(P)) = \deg(P') \leq n-1$ et donc $f(P) \in F$. Donc $F = \mathbb{R}_n[X]$ est stable par f.

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (5x + 3y, -6x - 4y)$. Montrer que $\text{Vect}((1, -2))$ est stable par f.

Propriété 32

On suppose que $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$.
F est stable par f si et seulement si $f(e_i) \in F$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.

Preuve.

$\square$

Propriété 33

Soit f et g deux endomorphismes de E qui commutent.
Alors les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(g)$ sont stables par f.

Preuve.

$\square$

Propriété 34

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

(1) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(P(f))$ et $\mathrm{Im}(P(f))$ sont stables par f.

(2) Les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par f.

(3) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par f.

Preuve.

(1) Les endomorphismes $P(f)$ et f sont des polynômes en f donc ils commutent. On peut donc appliquer la proposition précédente.

(2) et (3) Il suffit d'appliquer le point précédent pour $P = X$ puis pour $P = X - \lambda$.

$\square$

Définition.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E, stable par f.

L'application $f_{|F} : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est un endomorphisme de F appelé *endomorphisme induit par f sur F*.

Remarque. L'hypothèse « F stable par f » assure que l'application f restreinte à F est à valeurs dans F.

Exemple. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors F et G sont des sous-espaces stables par p puisque

$$\forall x \in F,\ p(x) = x \in F \quad \text{et} \quad \forall y \in G,\ p(y) = 0_E \in G.$$

Ainsi p induit un endomorphisme p_F sur F qui n'est autre que Id_F, et un endomorphisme p_G sur G qui est l'endomorphisme nul.

Propriété 35

Supposons E de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E. Soit $\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F qu'on complète en $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots e_n)$ une base de E.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Il y a équivalence entre :

(1) F est stable par f ;

(2) $M_{\mathscr{B}}(f)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$ (matrice triangulaire par blocs).

Preuve.

(1) $\Rightarrow$ (2) Supposons que F est stable par f. Pour tout $j = 1, \dots, p$, on a $e_j \in F$. Par stabilité, on a donc $f(e_j) \in F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Il existe donc $a_{1,j}, \dots, a_{p,j}$ tels que :

$$f(e_j) = a_{1,j}e_1 + \cdots + a_{p,j}e_p (+0e_{p+1} + \cdots + 0e_n).$$

Ainsi on a :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & \\ \vdots & & \vdots & (*) \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p} & \\ 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & (\star) \\ 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix}$$

où $(*)$ et $(\star)$ sont des coefficients des vecteurs $e_{p+1}, \dots, e_n$ dans la base $\mathscr{B}$. Donc $M_{\mathscr{B}}(f)$ est bien de la forme attendue.

$(2) \Rightarrow (1)$ Supposons que $M_{\mathscr{B}}(f)$ soit de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$. Pour tout $j = 1, \dots, p$, on a donc par définition de la matrice d'une application linéaire dans une base que :

$$f(e_j) = a_{1,j}e_1 + \dots + a_{p,j}e_p(+0e_{p+1} + \dots + 0e_n) \in F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p).$$

en notant $A = (a_{i,j})$. Ceci étant vrai pour tout $j = 1, \dots, p$, on a donc bien que F est stable par f.

□