

## Intégrales généralisées

<b>1</b>	<b>Rappels d'intégration sur un segment</b>	<b>2</b>
1.1	Définitions . . . . .	2
1.2	Propriétés élémentaires . . . . .	3
1.3	Sommes de Riemann . . . . .	3
1.4	Primitives usuelles . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Rappels sur les intégrales généralisées</b>	<b>5</b>
2.1	Définition . . . . .	5
2.2	Reste d'une intégrale généralisée convergente	8
2.3	Propriétés élémentaires . . . . .	8
2.4	Intégrales de référence . . . . .	9
2.5	Théorèmes de comparaison . . . . .	9
2.6	Intégrales absolument convergentes . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Techniques de calcul d'intégrales généralisées</b>	<b>12</b>
3.1	Intégration par parties . . . . .	12
3.2	Changement de variables . . . . .	13
<b>4</b>	<b>La fonction gamma <math>\Gamma</math></b>	<b>15</b>

### Compétences attendues.

- ✓ Étudier la convergence d'une intégrale (intégrales faussement impropres, comparaison à des séries de références pour les fonctions positives, absolue convergence).
- ✓ Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive.
- ✓ Calculer une intégrale par intégration par parties (en se ramenant à un segment).
- ✓ Déterminer la nature et calculer une intégrale par changement de variable.
- ✓ Reconnaître et utiliser la fonction  $\Gamma$ .

# 1 Rappels d'intégration sur un segment

## 1.1 Définitions

### Définition.

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . On appelle *primitive* de  $f$  sur  $I$  toute fonction  $F$  dérivable sur  $I$  telle que  $F' = f$ .

### Propriété 1

Soit  $f$  une fonction **continue** sur un intervalle  $I$ .

- $f$  admet une primitive sur  $I$ .
- si  $F$  et  $G$  sont deux primitives de  $f$ , alors il existe une constante  $c \in \mathbb{R}$  telle que :

$$\forall x \in [a, b], \quad F(x) = G(x) + c.$$

### Définition.

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle  $I$ . Soit  $(a, b) \in I^2$  tel que  $a \leq b$ . Alors si  $F$  est une primitive de  $f$ , on pose :

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Cette quantité est indépendante de la primitive de  $f$  choisie. On l'appelle *l'intégrale de  $f$  sur le segment  $[a, b]$* .

### Théorème 2 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ , et soit  $a \in I$ . Alors l'application

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , et c'est l'unique primitive de  $f$  sur  $I$  s'annulant en  $a$ .

## 1.2 Propriétés élémentaires

NOM	HYPOTHÈSES	CONCLUSION
<i>Relation de Chasles</i>	$f$ est continue sur $I$ , $a, b, c \in I$	$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$
<i>Linéarité</i>	$f, g$ continues sur $[a, b]$	$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$
<i>Positivité</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>a \leq b</math></li> <li><math>f</math> continue sur <math>[a, b]</math></li> <li><math>\forall t \in [a, b], f(t) \geq 0</math></li> </ul>	$\int_a^b f(t) dt \geq 0$
<i>Croissance</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>a \leq b</math></li> <li><math>f, g</math> continues sur <math>[a, b]</math></li> <li><math>\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t)</math></li> </ul>	$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$
<i>Cas de nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>a &lt; b</math></li> <li><math>f</math> est <b>continue</b> sur <math>[a, b]</math></li> <li><math>\forall t \in [a, b], f(t) \geq 0</math></li> <li><math>\int_a^b f(t) dt = 0</math></li> </ul>	$\forall t \in [a, b], f(t) = 0$
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>a &lt; b</math></li> <li><math>f</math> est <b>continue</b> sur <math>[a, b]</math></li> <li><math>\forall t \in [a, b], f(t) \geq 0</math></li> <li>Il existe <math>t_0 \in [a, b]</math> tel que <math>f(t_0) &gt; 0</math></li> </ul>	$\int_a^b f(t) dt > 0$

### Mise en garde.

Pour le cas de nullité d'une intégrale, on prendra soin de bien citer toutes les hypothèses :

- **continuité** de  $f$  sur  $[a, b]$  ;
- **positivité** de  $f$  sur  $[a, b]$ .

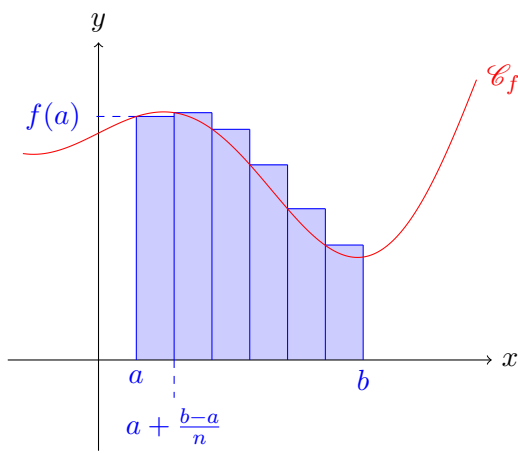
## 1.3 Sommes de Riemann

### Théorème 3 (Somme de Riemann - Méthode des rectangles)

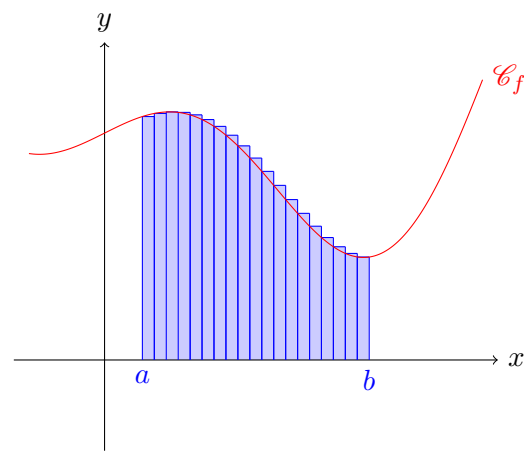
Si  $f$  est **continue** sur  $[a, b]$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt.$$

**Interprétation graphique.** Le terme  $\frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$  est l'aire du rectangle de base  $\frac{b-a}{n}$  et de hauteur  $f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ . La somme  $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$  correspond donc à l'aire en bleu dans les dessins ci-dessous.



$n = 6.$

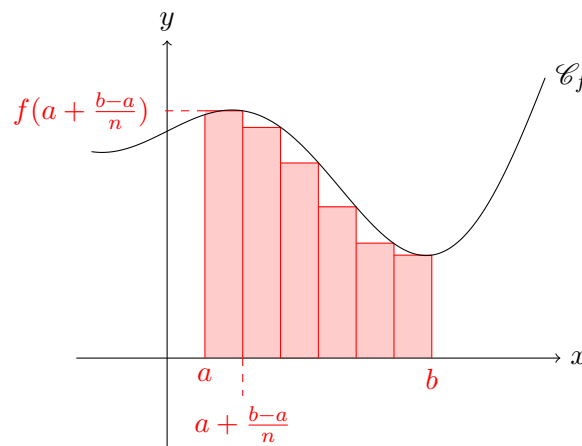


$n = 20.$

Méthode des rectangles « à gauche ».

Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , cette aire tend vers l'aire sous la courbe de  $f$  entre  $a$  et  $b$ . Le théorème des sommes de Riemann justifie donc l'interprétation de l'intégrale comme une aire dans le cas où  $f$  est positive.

**Remarque.** On a le même résultat avec la somme  $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ , qui correspond à la méthode des rectangles « à droite ».



Méthode des rectangles « à droite ».

### Méthode.

En pratique, on pourra penser à une somme de Riemann lorsque la suite  $(u_n)$  considérée est une somme finie de  $n$  termes et que le terme général de cette somme dépend également de  $n$ . On mettra alors  $\frac{1}{n}$  en facteur, et il s'agira d'identifier une fonction  $f$  de sorte que  $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$  (on prendra  $a = 0$  et  $b = 1$  dans la somme ci-dessus).

**Exercice.** Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$ .

## 1.4 Primitives usuelles

HYPOTHÈSES	FONCTION $x \mapsto \dots$	PRIMITIVE $x \mapsto \dots$
$u$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$	$u'e^u$	$e^u$
$u$ de classe $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas sur $I$	$\frac{u'}{u}$	$\ln( u )$
$u$ de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement positive sur $I$	$u'u^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$

FONCTION $x \mapsto \dots$	PRIMITIVE $x \mapsto \dots$	DOMAINE DE VALIDITÉ
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln( x )$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x^n, n \in \mathbb{Z}, n \leq -2$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$e^x$	$e^x$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln( \cos(x) )$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^*$

## 2 Rappels sur les intégrales généralisées

### 2.1 Définition

#### Définition.

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b[$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Si  $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$  converge, on dit que l'intégrale généralisée (ou impropre)  $\int_a^b f(t) dt$  converge, et on note :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt.$$


Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée est *divergente*.

La nature d'une intégrale généralisée est son caractère convergent ou divergent.

**Exercice.** Déterminer la nature des intégrales suivantes :

- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ .

- $\int_0^{+\infty} \sin(t) dt$ .

 **Mise en garde.**

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ converge} \quad \not\Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0.$$

Il se peut en effet que cette intégrale converge sans que  $f$  admette de limite en  $+\infty$ . Il n'y a donc pas pour les intégrales généralisées d'analogue à la divergence grossière pour les séries.

**Remarque.** On peut néanmoins montrer que : si  $f$  est continue sur  $[a, +\infty[$ , que  $f$  **admet une limite en  $+\infty$**  et que  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  converge, alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ .

**Définition.**

- On définit, de même que précédemment, l'intégrale sur un intervalle de la forme  $]a, b]$  où  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et  $b \in \mathbb{R}$  comme la limite (si elle existe)  $\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$ .
- Si  $f$  est continue sur un intervalle  $]a, b[$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  est dite *convergente* si pour un (et donc pour tous)  $c \in ]a, b[$ , les deux intégrales

$$\int_a^c f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t) dt$$

convergent. On pose alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

**Remarque.** En pratique, on choisit le réel  $c \in ]a, b[$  qui nous arrange le plus.

**Exercice.** Déterminer la nature de  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ .

**Propriété 4**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b[$  avec  $b$  **réel**.

Si  $\lim_{t \rightarrow b^-} f(t)$  existe et est **finie**<sup>a</sup>, alors l'intégrale généralisée  $\int_a^b f(t) dt$  converge.

<sup>a</sup>Sous ces hypothèses, on sait alors que  $f$  est prolongeable par continuité en  $b$ . Son prolongement  $\tilde{f}$  est alors continu sur le segment  $[a, b]$ .



**Vocabulaire.** On parle alors d'intégrale *faussement généralisée* (ou *faussement impropre*) : cela relève en effet du cas classique de l'intégrale de la fonction continue  $\tilde{f}$  sur le segment  $[a, b]$ .

**Exercice.** Étudier la nature de l'intégrale  $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt$ .

Plus généralement, nous pouvons être amené à considérer des fonctions qui ne sont pas continues sur un intervalle, mais sur un intervalle privé d'un nombre fini de points.

### Propriété 5

Considérons  $-\infty \leq a = a_1 < a_2 < \dots < a_p = b \leq +\infty$ , et soit  $f$  une fonction continue sur chacun des intervalles  $]a_i, a_{i+1}[$ ,  $1 \leq i \leq p-1$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On dit que l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  converge si chacune des intégrales  $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t) dt$  converge pour  $1 \leq i \leq p-1$ . On note alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{a_1}^{a_2} f(t) dt + \dots + \int_{a_{p-1}}^{a_p} f(t) dt.$$

### Méthode.

Pour étudier une intégrale généralisée  $\int_a^b f(t) dt$ , il faut :

- (1) déterminer précisément où la fonction  $f$  est continue. Pour les points où le domaine de continuité est ouvert, il faut étudier la convergence de l'intégrale ;
- (2) étudier l'intégrabilité de  $f$  sur tous les sous-intervalles de  $[a, b]$  contenant au plus un point où l'intégrale est impropre ;
- (3) l'intégrale de départ converge si TOUTES ces intégrales convergent. En cas de convergence, l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  est égale à la somme des intégrales sur tous ces sous-intervalles.

**Exercice.** Déterminer la nature de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  avec  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$ .

## 2.2 Reste d'une intégrale généralisée convergente

### Définition.

On suppose que  $f$  est une fonction continue sur l'intervalle  $[a, b[$  (définition analogue sur  $]a, b)$  et que l'intégrale  $\int_a^b f(t)dt$ , généralisée en  $b$ , **converge**.

On appelle *reste de l'intégrale généralisée*  $\int_a^b f(t)dt$  la fonction  $R : x \mapsto \int_x^b f(t)dt$ .

### Propriété 6

La fonction  $R$  est bien définie sur  $[a, b[$  et on a :

$$\lim_{x \rightarrow b} R(x) = 0.$$

Preuve.

□

## 2.3 Propriétés élémentaires

NOM	HYPOTHÈSES	CONCLUSION
<i>Relation de Chasles</i>	Toutes les intégrales en jeu convergent	$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$ ( $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ )
<i>Linéarité</i>	$\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent	$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt$ converge ( $\lambda, \mu$ réels) $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$
	$\int_a^b f(t) dt$ converge et $\int_a^b g(t) dt$ diverge	$\int_a^b (f + g)(t) dt$ diverge
<i>Positivité</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>a \leq b</math></li> <li><math>\forall t \in [a, b[, f(t) \geq 0</math></li> <li><math>\int_a^b f(t) dt</math> converge</li> </ul>	$\int_a^b f(t) dt \geq 0$
<i>Croissance</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>a \leq b</math></li> <li><math>\forall t \in [a, b[, f(t) \leq g(t)</math></li> <li><math>\int_a^b f(t) dt</math> et <math>\int_a^b g(t) dt</math> convergent</li> </ul>	$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$
<i>Cas de nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>a &lt; b</math></li> <li><math>f</math> est <b>continue</b> sur <math>[a, b[</math></li> <li><math>\forall t \in [a, b[, f(t) \geq 0</math></li> <li><math>\int_a^b f(t) dt</math> converge et <math>\int_a^b f(t) dt = 0</math></li> </ul>	$\forall t \in [a, b[, f(t) = 0$
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>a &lt; b</math></li> <li><math>f</math> est <b>continue</b> sur <math>[a, b[</math></li> <li><math>\forall t \in [a, b[, f(t) \geq 0</math></li> <li>Il existe <math>t_0 \in [a, b[</math> tel que <math>f(t_0) &gt; 0</math></li> <li><math>\int_a^b f(t) dt</math> converge</li> </ul>	$\int_a^b f(t) dt > 0$





### Mise en garde.

L'intégrale généralisée  $\int_a^b (f+g)(t) dt$  peut converger alors que  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^b g(t) dt$  divergent. **On ne peut donc pas scinder une intégrale généralisée en deux sans vérifier au préalable que ces deux intégrales convergent.**

## 2.4 Intégrales de référence

	INTÉGRALE	NATURE	VALEUR
Riemann	En $+\infty$ : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$	Converge ssi $\alpha > 1$	À retrouver si besoin à l'aide d'une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ : $\begin{cases} t \mapsto \ln t & \text{si } \alpha = 1 \\ t \mapsto \frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$
	En $a \in \mathbb{R}$ : $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ ( $b \in \mathbb{R}, b > a$ )	Converge ssi $\alpha < 1$	
	Cas particulier $a = 0$ : $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$		
Expon.	$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	Converge ssi $\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$
Log.	$\int_0^1 \ln(t) dt$	Converge	À retrouver si besoin à l'aide d'une primitive de $t \mapsto \ln(t)$ : $t \mapsto t \ln(t) - t$
Gauss	$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$	Converge	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
	$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$	Converge	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
Gamma	$\int_0^{+\infty} t^{\nu-1} e^{-t} dt \quad (\nu \in \mathbb{R})$	Converge ssi $\nu > 0$	$\Gamma(\nu)$ par définition

### Exemples.

- $\int_0^1 \frac{dt}{t}$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$  sont toutes deux divergentes.
- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}}$  est convergente (intégrale de Riemann en  $+\infty$  avec  $\alpha > \frac{3}{2}$ ).
- $\int_2^3 \frac{dt}{\sqrt{t-2}}$  est convergente (intégrale de Riemann en 2 avec  $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ ).

## 2.5 Théorèmes de comparaison

### Propriété 7

Soit  $f$  une fonction continue et **positive** sur  $[a, b]$ . Alors l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  converge si et seulement si la fonction  $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est majorée.

Grâce à cette propriété, on en déduit les résultats suivants, où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $[a, b[$  :

COMPARAISON PAR	HYPOTHÈSES	CONCLUSION
<i>Inégalité</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Au voisinage de <math>b</math>, <math>0 \leq f(t) \leq g(t)</math></li> <li>• <math>\int_a^b g(t)dt</math> converge</li> </ul>	$\int_a^b f(t)dt$ converge
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Au voisinage de <math>b</math>, <math>0 \leq f(t) \leq g(t)</math></li> <li>• <math>\int_a^b f(t)dt</math> diverge</li> </ul>	$\int_a^b g(t)dt$ diverge
<i>Négligeabilité</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f(t) = o_b(g(t))</math></li> <li>• Au voisinage de <math>b</math>, <math>g(t) \geq 0</math></li> <li>• <math>\int_a^b g(t)dt</math> converge</li> </ul>	$\int_a^b f(t)dt$ converge
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f(t) = o_b(g(t))</math></li> <li>• Au voisinage de <math>b</math>, <math>g(t) \geq 0</math> et <math>f(t) \geq 0</math></li> <li>• <math>\int_a^b f(t)dt</math> diverge</li> </ul>	$\int_a^b g(t)dt$ diverge
<i>Équivalent</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f(t) \sim_b g(t)</math></li> <li>• Au voisinage de <math>b</math>, <math>g(t) \geq 0</math> (ou <math>f(t) \geq 0</math>)</li> <li>• <math>\int_a^b g(t)dt</math> converge (respectivement diverge)</li> </ul>	$\int_a^b f(t)dt$ converge (resp. diverge)

**Exercice.** Étudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

- $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$ .

- Intégrale de Gauss  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

## 2.6 Intégrales absolument convergentes

### Définition.

On dit que l'intégrale généralisée  $\int_a^b f(t) dt$  converge absolument lorsque l'intégrale  $\int_a^b |f(t)| dt$  converge.

### Théorème 8

Si l'intégrale généralisée  $\int_a^b f(t) dt$  converge absolument, **alors** elle converge. De plus, on a :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \quad (\text{Inégalité triangulaire})$$

**Preuve.** La preuve est semblable au cas des séries, et laissée en exercice. □

**Exercice.** Étudier la nature des intégrales suivantes :

- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t\sqrt{t}} dt.$

- $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt.$



### Mise en garde.

La réciproque du théorème précédent est fautive : on peut par exemple montrer que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$  converge, mais ne converge pas absolument. On parle alors d'*intégrale semi-convergente*.

### 3 Techniques de calcul d'intégrales généralisées

#### 3.1 Intégration par parties

**Propriété 9** (*Intégration par parties*)

Soient  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[a, b]$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ . On a :

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = \left[ f(t)g(t) \right]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt.$$

**Preuve.** On a :

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt + \int_a^b f(t)g'(t) dt = \int_a^b (f'(t)g(t) + f(t)g'(t)) dt = \int_a^b (fg)'(t) dt = \left[ f(t)g(t) \right]_a^b$$

puisque  $f \times g$  est  $\mathcal{C}^1$  comme produit de fonctions qui le sont. □

**Notation.** En pratique, on procèdera à une intégration par partie en utilisant le tableau suivant :

$$\begin{array}{c} + \\ - \end{array} \left| \begin{array}{ccc} g & & f' \\ & \searrow & \\ & \int & \\ & \longleftarrow & f \end{array} \right.$$

**Exercice.** Déterminer une primitive de  $x \mapsto \ln(x)$ .

**Exercice.** Calculer  $I = \int_0^\pi (t^2 - t + 1) \cos t dt$ .



### Mise en garde.

On n'effectuera JAMAIS d'intégration par partie directement sur une intégrale généralisée.



### Méthode.

Pour faire une intégration par partie pour une intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  généralisée en  $b$  :

- on commence par faire cette intégration par parties sur un segment  $[a, x]$  avec  $x \in [a, b[$  ;
- on fait ensuite tendre  $x$  vers  $b$  en veillant à bien justifier que toutes les limites considérées existent.

**Exercice.** Nature et valeur éventuelle de  $\int_0^1 t \ln(t) dt$ .

## 3.2 Changement de variables

### Théorème 10 (Changement de variable pour les intégrales généralisées)

Soit  $f$  une fonction continue sur  $]a, b[$ ,  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . On considère une fonction  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

Hypothèses :

- $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]a, b[$ ,
- $\varphi$  est **strictement monotone** sur  $]a, b[$ ,
- $\varphi(]a, b[) = ]\alpha, \beta[$ .

Alors les intégrales généralisées  $\int_a^b f(x) dx$  et  $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$  sont de même nature, et en cas de convergence sont égales.



**Remarque.** Les hypothèses sont plus contraignantes que pour un changement de variable sur un segment : en plus d'être  $\mathcal{C}^1$ , le changement de variable doit être **strictement monotone** pour être licite.



**Preuve.** On fait la preuve dans le cas où  $\varphi$  est strictement croissante (la preuve est la même dans le cas décroissant). On a dans ce cas  $\lim_{t \rightarrow a^+} \varphi(t) = \alpha$  et  $\lim_{t \rightarrow b^-} \varphi(t) = \beta$ . Par le théorème de la bijection,  $\varphi$  réalise une bijection de  $]a, b[$  dans  $]\alpha, \beta[$ .

Soit  $c \in ]a, b[$ , et soit  $u \in [c, b[$ . D'après le théorème de changement de variables sur un segment, on a :

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(u)} f(x) dx = \int_c^u f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

La fonction  $\varphi$  réalisant une bijection de  $]a, b[$  dans  $]\alpha, \beta[$ ,  $\lim_{u \rightarrow b^-} \int_{\varphi(c)}^{\varphi(u)} f(x) dx$  existe si et seulement si

$\lim_{A \rightarrow \beta^-} \int_{\varphi(c)}^A f(x) dx$  existe, et si c'est le cas :

$$\int_{\varphi(c)}^{\beta} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \beta^-} \int_{\varphi(c)}^A f(x) dx = \lim_{u \rightarrow b^-} \int_{\varphi(c)}^{\varphi(u)} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow b^-} \int_c^u f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_c^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

On montre de même que les intégrales généralisées  $\int_{\alpha}^{\varphi(c)} f(x) dx$  et  $\int_a^c f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$  sont de même nature, et en cas de convergence sont égales.

Finalement,  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  et  $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$  sont de même nature, et en cas de convergence sont égales.  $\square$

### Remarques.

- Les changements de variable affines (c'est-à-dire  $\varphi(t) = mt + p$ ,  $m \neq 0$ ) sont licites, rien ne sera alors à vérifier.
- Tout changement de variable non affine sera précisé dans l'énoncé. Il s'agira alors de bien vérifier que le changement est licite, c'est-à-dire de classe  $\mathcal{C}^1$  et strictement monotone.



### Méthode.

Lorsqu'on effectue un changement de variable, on montre tout d'abord qu'il est licite (c'est à dire  $\mathcal{C}^1$  et strictement monotone). On veillera ensuite en effectuant le changement de variable à modifier les trois éléments :

- la variable  $x = \varphi(t)$ ,
- l'élément différentiel  $dx = \varphi'(t) dt$ ,
- les bornes de l'intégrale : si  $t$  varie entre  $a$  et  $b$ ,  $x = \varphi(t)$  varie entre  $\lim_{t \rightarrow a^+} \varphi(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow b^-} \varphi(t)$ .

**Exercice.** Déterminer la nature et la valeur éventuelle des intégrales suivantes :

- $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$  (poser  $t = \sqrt{x}$ ).

- $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  (poser  $x = \cos(t)$ ).

### Propriété 11

Soit  $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , et  $f$  une fonction continue sur  $] -a, a[$ .

- Si  $f$  est **paire**.

Les intégrales généralisées  $\int_{-a}^a f(t) dt$  et  $\int_0^a f(t) dt$  sont de même nature, et en cas de convergence on a  $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$ .

- Si  $f$  est **impaire**.

Les intégrales généralisées  $\int_{-a}^a f(t) dt$  et  $\int_0^a f(t) dt$  sont de même nature, et en cas de convergence on a  $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$ .

**Preuve.** Dans le cas  $f$  paire, le changement de variable  $x = -t$  affine, donc licite, nous indique que

$$\int_0^a f(t) dt \text{ et } - \int_0^{-a} f(-x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx$$

sont de même nature, et qu'en cas de convergence sont égales. Or la convergence de ces intégrales est équivalente à la convergence de  $\int_{-a}^a f(t) dt$ , et dans ce cas on a :

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt.$$

Le cas  $f$  impaire se montre de la même façon. □

**Exemple.** L'intégrale de Gauss  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$  converge et on a  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ .

## 4 La fonction gamma $\Gamma$

### Propriété 12

L'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} t^{\nu-1} e^{-t} dt$  converge si et seulement si  $\nu > 0$ .

**Preuve.**

**Définition.**

□

On appelle *fonction Gamma d'Euler* et on note  $\Gamma$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} t^{\nu-1} e^{-t} dt.$$

**Propriété 13**

- (1)  $\forall \nu \in ]0, +\infty[$ , on a  $\Gamma(\nu + 1) = \nu\Gamma(\nu)$ .
- (2)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma(n + 1) = n!$ .
- (3)  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

**Preuve.**

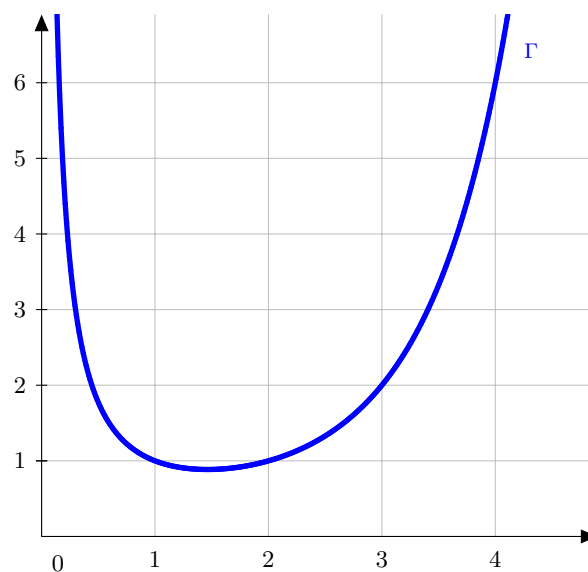


□

**Le saviez vous ?**

Historiquement, c'est la formule (2) qui a justifié qu'on s'intéresse à la fonction  $\Gamma$  : les mathématiciens du XVIII<sup>e</sup> siècle cherchaient un moyen de prolonger la factorielle, a priori définie uniquement pour les nombres entiers, à tous les réels positifs. Euler proposa la fonction  $\Gamma$  en 1729. Première fonction définie à l'aide d'une intégrale, elle se révéla extrêmement féconde.

Leonhard Euler (1707 - 1783) est considéré comme l'un des plus grands et des plus prolifiques mathématiciens de tous les temps. Il a travaillé dans presque tous les domaines des mathématiques : la géométrie, le calcul infinitésimal, la trigonométrie, l'algèbre et la théorie des nombres. S'ils étaient imprimés, ses écrits, dont beaucoup sont d'un intérêt fondamental, pourraient occuper entre quarante et soixante ouvrages. Devenu aveugle à la fin de sa vie, son état n'a eu que peu d'effet sur sa productivité. En fait, elle augmenta même. Ainsi avec l'aide de scribes, il produisit en moyenne un document de mathématiques par semaine au cours de l'année 1775 !

**Représentation graphique.**

*La fonction  $\Gamma$ .*

**Remarque.** On sait que  $e^n = o(n!)$ . Une étude plus poussée de la fonction  $\Gamma$  nous permettrait de montrer que :

$$e^x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\Gamma(x)).$$

Autrement dit, la fonction  $\Gamma$  tend vers  $+\infty$  « plus vite » que la fonction exponentielle.