Chapitre 9

Valeurs propres, vecteurs propres

Compétences attendues.

- ✓ Déterminer les valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme (cas des matrices 2×2, triangulaires, à l'aide d'un polynôme annulateur, ou dans le cas général).
- ✓ Déterminer le sous-espace propre associé à une valeur propre λ.
- ✓ Utiliser l'inégalité $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) \leq \dim(E)$.

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en ECS2 au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Valeurs propres, vecteurs propres

Dans tout ce chapitre :

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$;
- f est un endomorphisme de E ;
- A est une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Objectif. Trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est « la plus simple possible » pour faciliter les calculs. On verra dans le **Chapitre 13. Diagonalisation.** sous quelles conditions on peut obtenir une matrice diagonale et comment l'obtenir. D'un point de vue matriciel, cela correspond à étudier les conditions sur A pour obtenir une matrice diagonale semblable à A, et déterminer la matrice de passage correspondante.

Partons de notre objectif en supposant que la matrice de f dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E soit diagonale :

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On a alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = \lambda_i \cdot e_i$ avec $e_i \neq 0_E$ (car c'est un vecteur d'une famille libre). Ceci conduit naturellement à la notion d'*éléments propres* que l'on développe dans ce chapitre.

1.1 Vecteurs propres et espaces propres d'un endomorphisme

Définition.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une *valeur propre de f* lorsque :
$$\exists x \in E \setminus \{0_E\}, \quad f(x) = \lambda \cdot x.$$
- On dit alors qu'un vecteur **non nul** $x \in E$ est un *vecteur propre de f associé à la valeur propre λ* si :
$$f(x) = \lambda \cdot x.$$
- On appelle *spectre de f* et on note $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f.

Exercice. $E = \mathbb{R}^3$, f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, -2x - 2y + 5z).$$

Montrer que $u = (1, 0, 1)$ est un vecteur propre de f et déterminer la valeur propre λ associée.

Remarque. Pour tout $x \in E$, on a :

$$f(x) = \lambda \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad (f - \lambda Id_E)(x) = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E).$$

Définition.

Si λ est une valeur propre de f, on appelle *sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ* et on note E_λ le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$E_\lambda(f) = \{x \in E \,/\, f(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E).$$

$E_\lambda(f)$ est ainsi constitué de tous les vecteurs propres associés à λ **et** du vecteur nul 0_E.

Exercice. Déterminer $E_\lambda(f)$ dans l'exercice précédent.

Remarque. Supposons que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(f) &\Leftrightarrow \exists x \neq 0_E, \quad f(x) = \lambda \cdot x \\
&\Leftrightarrow \exists x \neq 0_E, \quad x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E) \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\} \\
&\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E)) \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{rg}(f - \lambda Id_E)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E)) < n \quad \text{par le théorème du rang} \\
&\Leftrightarrow (f - \lambda Id_E) \text{ n'est pas bijective.}
\end{aligned}$$

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 1 (Caractérisation des valeurs propres)

On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(f) &\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E)) \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{rg}(f - \lambda Id_E) < n \\
&\Leftrightarrow (f - \lambda Id_E) \text{ n'est pas bijective.}
\end{aligned}$$

De plus, on a $\dim(E_\lambda(f)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f - \lambda Id_E)$.

Exercice. On considère toujours l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(x,y,z) = (x-2y+2z, -2x+y+2z, -2x-2y+5z).$$

Montrer que 1 est valeur propre de f et déterminer le sous-espace propre associé.

Propriété 2 (Cas particulier : la valeur propre 0)

On a l'équivalence :

$$0 \in \mathrm{Sp}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ n'est pas bijective.}$$

De plus on a $\dim(E_0(f)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f)$.

1.2 Vecteurs propres et espaces propres d'une matrice carrée

On définit les éléments propres d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ comme ceux de l'endomorphisme canoniquement associé $\varphi_A : \begin{cases} \mathscr{M}_{n,1} & \to \mathscr{M}_{n,1} \\ X & \mapsto AX \end{cases}$.

Définition.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une *valeur propre de A* lorsque :
$$\exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n,1}\}, \quad AX = \lambda X.$$
- On dit qu'un vecteur colonne **non nul** $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un *vecteur propre de A associé à la valeur propre λ* si :
$$AX = \lambda X.$$
- On appelle *spectre de A* et on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.

Remarque. En `SciLab`, la commande `spec(A)` permet d'obtenir le spectre de A.

Définition.

Lorsque λ est une valeur propre de A, on appelle *sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ*, et on note $E_\lambda(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par :

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \,/\, AX = \lambda X\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n).$$

$E_\lambda(A)$ est ainsi constitué de tous les vecteurs propres associés à λ **et** du vecteur nul $0_{n,1}$.

Propriété 3 (Liens endomorphismes/matrices)

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et $A = \mathscr{M}_\mathscr{B}(f)$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E) \quad \Leftrightarrow \quad X = \mathscr{M}_\mathscr{B}(x) \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n).$$

En particulier on a $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$ et $\dim(E_\lambda(f)) = \dim(E_\lambda(A))$ pour toute valeur propre λ.

Preuve. Il suffit de noter que la matrice de $f - \lambda Id_E$ est $A - \lambda I_n$. Ainsi on a bien l'équivalence souhaitée, et en particulier :

$$\mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\}.$$

Donc on a bien $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$. □

Propriété 4

Deux matrices semblables A et A' ont les mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension.

Preuve.

□

Mise en garde.

Il n'y a pas de réciproque : deux matrices ayant mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension ne sont pas forcément semblables.

Tous les énoncés concernant les endomorphismes sont vrais en particulier pour l'endomorphisme φ_A et ils peuvent donc être reformulés pour une matrice A. Ainsi on a le

Théorème 5 (Caractérisation des valeurs propres)

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)) \geq 1\\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A-\lambda I_n) < n\\ &\Leftrightarrow (A-\lambda I_n) \text{ n'est pas inversible}\end{aligned}$$

De plus on a $\dim(E_\lambda(A)) = n - \mathrm{rg}(A-\lambda I_n)$.

Propriété 6 (Cas particulier : la valeur propre 0)

On a les équivalences :

$$0 \in \mathrm{Sp}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(A) < n \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ n'est pas inversible.}$$

De plus on a $\dim(E_0(A)) = n - \mathrm{rg}(A)$.

Propriété 7

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres. De plus, on a $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda({}^tA))$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

Preuve.

$\square$

Mise en garde.

En revanche, les sous-espaces propres de A et ${}^tA$ n'ont aucune raison d'être égaux : un vecteur X vérifiant $AX = \lambda X$ ne vérifiera pas nécessairement ${}^tAX = \lambda X$.

2 Recherche d'éléments propres

Vocabulaire. Déterminer les *éléments propres* d'un endomorphisme ou d'une matrice, c'est déterminer :

- toutes ses valeurs propres,
- le sous-espace propre associé à chacune des valeurs propres (souvent en donnant une base de ce sous-espace vectoriel).

2.1 Cas des matrices 2×2

Propriété 8 (Cas des matrices 2×2)

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \text{ est racine de } X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A).$$

Preuve.

□

Exercice. Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$.

2.2 Cas des matrices triangulaires

Propriété 9

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire, alors ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux.

Preuve.

□

Exemple. Les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ sont $-2, 0, 5$.

Propriété 10

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur de rang $1 \leq r \leq n-1$. Alors on a $\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\}$.

Preuve.

$\square$

2.3 Utilisation d'un polynôme annulateur

Propriété 11

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, et $x \in E_\lambda(f)$. Alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$P(f)(x) = P(\lambda) \cdot x.$$

Preuve.

$\square$

Propriété 12

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de $f \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$). Alors les valeurs propres de f (resp. A) sont **parmi** les racines de P.

Preuve.

$\square$

Mise en garde.

Attention, il n'y a **pas de réciproque** : une racine de P n'est pas forcément valeur propre de f. Par exemple $X(X-1)$ est un polynôme annulateur de Id_E. Donc les valeurs propres **possibles** pour Id_E sont 0 et 1. Réciproquement, seul 1 est valeur propre de Id_E.

Exemple. Supposons E de dimension finie n, et soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur de rang $1 \leq r \leq n-1$, sur F parallèlement à G. Puisque $p \circ p = p$, $A = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p. Donc les valeurs propres **possibles** de p sont 0 et 1.

Vérifions que ce sont bien des valeurs propres de p :

- $E_0(p) = \mathrm{Ker}(p) = G$, et on a par le théorème du rang $\dim(E_0(p)) = n - \mathrm{rg}(p) = n - r > 0$. Donc 0 est bien valeur propre de p.
- $E_1(p) = \mathrm{Ker}(p - Id_E) = F = \mathrm{Im}(p)$. Or $\dim(\mathrm{Im}(p)) = r > 0$. Donc 1 est bien valeur propre de p.

Exercice. Déterminer les valeurs propres de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice. Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme f nilpotent d'indice $k \in \mathbb{N}^*$ (c'est à dire tel que $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{k-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$).

2.4 Recherche des valeurs propres « à vue »

Méthode.

On pourra tenter de trouver directement, lorsque cela est facile :

- *un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A - \lambda I_n$ est de rang $< n$;*
- *une matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle qui satisfait $AX = \lambda X$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.*

  On pourra tester notamment $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ qui conviendra bien souvent.

Si l'un de ces points est satisfait, λ est valeur propre de A.

Exercice. Donner deux valeurs propres de $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.5 Cas général

Méthode.

En dernier recours, et ***seulement si toutes les méthodes précédentes n'aboutissent pas*** *(ce qui n'est pratiquement jamais le cas dans un sujet de concours), on procèdera comme suit pour déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme f ou d'une matrice A :*

(i) *On écrit la matrice A de f dans une base donnée ;*

(ii) *On calcule $A - \lambda I_n$ où λ est une indéterminée ;*

(iii) *On échelonne la matrice $A - \lambda I_n$ en suivant l'algorithme de Gauss* ***sur les lignes****. On respectera pour cela les consignes suivantes :*

- *Autant que possible, on échangera deux lignes afin de ne plus avoir λ sur la diagonale, sauf sur le dernier coefficient en bas à droite ;*
- *Si ce n'est pas possible, on sera amené à prendre pour pivot une expression dépendant de λ. Dans ce cas, on poursuit l'algorithme en supposant ce pivot non nul pour ne pas diviser par 0. On indiquera alors à cette étape les valeurs « interdites » pour λ ;*

(iv) *λ est valeur propre de A si et seulement si $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$, soit si et seulement si l'un des pivots est nul (argument à redonner à chaque fois). On est donc ramené à la résolution d'équations polynomiales.*

(v) *On termine en étudiant chaque valeur interdite : on reprend les calculs et on regarde si $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$ pour chaque valeur de λ exclue précédemment.*

Exercice. Déterminer le spectre des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Méthode.

On suppose avoir déterminé les valeurs propres de A par l'algorithme de Gauss. Pour déterminer $E_\lambda(A)$:

- *Si on veut seulement sa dimension :* $E_\lambda(A) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$ *;*
- *Pour déterminer explicitement $E_\lambda(A)$, on résout le système linéaire $(A - \lambda I_n)X = 0_{n,1}$ qui a déjà été échelonné dans le calcul des valeurs propres. $E_\lambda(A)$ est alors l'ensemble des solutions de ce système.*

Exercice. Calculer la dimension et les sous-espaces propres des matrices précédentes.

3 Propriétés générales

3.1 Sous-espaces propres stables

Propriété 13

- Soient f et g des endomorphismes de E qui commutent. Alors tout sous-espace propre de f est stable par g.
- Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f)$, $E_\lambda(f)$ est stable par f. L'endomorphisme induit par f sur $E_\lambda(f)$ est l'homothétie de rapport λ.

Preuve.

□

Remarque. Il est difficile de comprendre géométriquement la façon dont $f \in \mathscr{L}(E)$ agit sur E tout entier. La propriété précédente nous dit que sur chacun des sous-espaces propres $E_\lambda(f)$, cette application linéaire agit très simplement : elle transforme $x \in E_\lambda(f)$ en $\lambda \cdot x$.

3.2 Somme directe de sous-espaces propres

Propriété 14

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts. Alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ tel que :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad L_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}.$$

La famille $(L_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ est appelée *famille des polynômes de Lagrange* associée à $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Preuve.

□

Propriété 15

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ des valeurs propres deux à deux distinctes de $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors la somme $\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f)$ est directe.

Preuve.

□

3.3 Conséquences

Propriété 16

Une famille de vecteurs propres de f associée à des valeurs propres distinctes est libre.

Preuve.

$\square$

Propriété 17

- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors f possède au plus $n = \dim(E)$ valeurs propres distinctes.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A possède au plus n valeurs propres distinctes.

Preuve.

$\square$

Remarque. Il se peut bien évidemment que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède strictement moins de n valeurs propres. Par exemple :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ possède une seule valeur propre 1.
- $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne possède aucune valeur propre réelle. En effet, on a :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(B) \Leftrightarrow \lambda^2 - \mathrm{Tr}(B)\lambda + \det(B) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0.$$

  Cette équation n'ayant pas de solution réelle, il n'y a pas de valeur propre réelle. Par contre B possède deux valeurs propres complexes i et $-i$.

Propriété 18

On a :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) \leq n = \dim(E).$$

Preuve.

$\square$

Remarque. Il n'y a pas égalité en général. On a vu par exemple que pour $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$ et $\dim(E_1(A)) = \dim(E_2(A)) = 1$, et donc :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 2 < 3.$$

Exercice. Déterminer toutes les valeurs propres de $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Propriété 19

- Si $f \in \mathscr{L}(E)$ possède $n = \dim(E)$ valeurs propres distinctes, alors les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

  De plus, il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède n valeurs propres distinctes, alors tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

  De plus, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Preuve.

$\square$

Exercice. Que peut-on dire de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$?