Complément 0

Méthodes d'étude d'une suite récurrente d'ordre 1.

Dans ce complément de cours, nous présentons diverses méthodes pour l'étude d'une suite définie par une relation de récurrence d'ordre 1, c'est à dire satisfaisant :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où f est une fonction définie sur un intervalle I. Bien que les exercices seront souvent détaillés et qu'aucune connaissance théorique sur ces suites n'est exigée en ECS, il est utile de connaitre les différentes situations que l'on peut rencontrer, et de savoir comment mener l'étude d'une telle suite selon les cas.

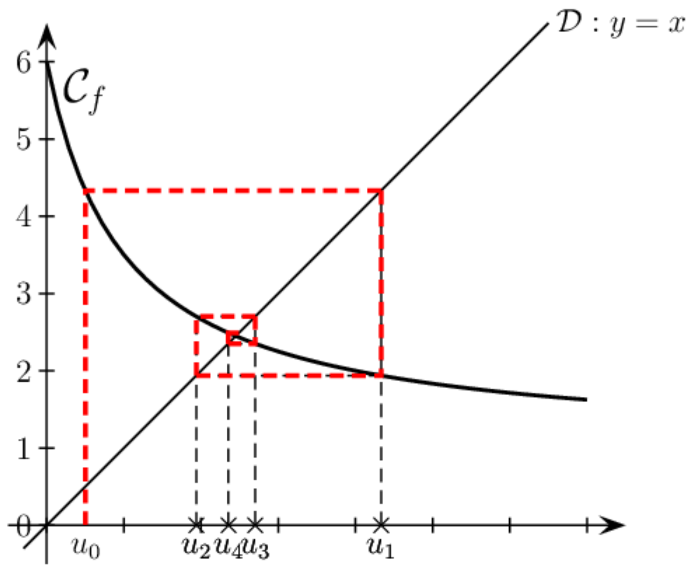
Construction graphique

Afin d'avoir une idée du comportement de la suite, ce qui est très utile pour ensuite mener son étude, on commencera par visualiser graphiquement ses premiers termes.

Méthode.

Pour représenter les premiers termes de la suite (u_n), on procèdera ainsi :

- *On effectue l'étude de la fonction f, puis on trace sur un même graphe sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.*
- *On place u_0 sur l'axe des abscisses.*
- *À l'aide de la courbe de f, on place $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.*
- *Grâce à la droite $\mathscr{D}$, on replace u_1 sur l'axe des abscisses, puis on réitère le processus sur u_1 ...*



Construction graphique des premiers termes de la suite (u_n).

Existence et encadrement des termes de la suite

Mise en garde.

Une définition par récurrence n'assure pas l'existence de la suite. En effet, les termes de la suite peuvent sortir du domaine de définition de f.

Exemple.

Considérons la suite définie par $u_0 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \ln(u_n)$$

Elle n'est bien définie que pour ses trois premiers termes car $u_1 = \ln(2) \simeq 0,69$, $u_2 = \ln(\ln(2) \simeq -0,36$, et donc u_3 n'existe pas car u_2 est sorti du domaine de définition du logarithme.

Pour s'assurer de l'existence de tous les termes de la suite, on choisit donc u_0 dans un intervalle stable de f.

Définition.

On dit qu'un intervalle $J \subset I$ est *stable par f* si $f(J) \subset J$, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in J, \quad f(x) \in J.$$

Méthode.

Pour montrer qu'un intervalle J est stable par f, on pourra selon les cas :

- *soit déterminer $f(J)$ à l'aide du tableau de variation de f et vérifier que $f(J) \subset J$;*
- *soit « à la main » : si $J = [a, b]$ (par exemple) et si $a \leq x \leq b$, montrer que $a \leq f(x) \leq b$.*

Méthode.

Pour montrer que la propriété $\mathscr{P}(n)$: « u_n existe et $u_n \in J$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pourra utiliser que J est stable par f et faire la récurrence suivante.

Init. *On a $u_0 \in J$ dans $\mathscr{P}(0)$ est vraie.*

Hér. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie au rang n.*

On a par hypothèse de récurrence $u_n \in J \subset \mathscr{D}_f$. Donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe bien. De plus, puisque J est un intervalle stable, $u_{n+1} \in f(J) \subset J$. D'où la propriété au rang $n+1$.

Concl. *Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et appartient à J.*

Variations de la suite

Cas général

Méthode.

Pour étudier les variations de la suite (u_n), on pourra tenter de comparer directement u_n et u_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$, en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Si jamais ce signe est trop compliqué à étudier, on pourra se rappeler que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. On étudie alors la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur J et on dresse son tableau de signe.

- *Si $g(x) \geq 0$ sur J, alors quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on a en prenant $x = u_n$ que $f(u_n) - u_n \geq 0$, c'est à dire $u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est croissante.*
- *Si $g(x) \leq 0$ sur J, alors de même la suite (u_n) est décroissante.*

Si la fonction f est croissante

Méthode.

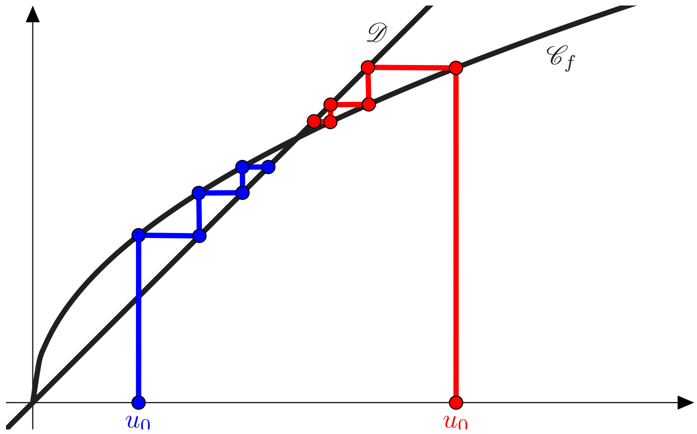
Si la fonction f est croissante, on peut toujours montrer que la suite (u_n) est monotone. Pour cela

- *on compare les deux premiers de la suite u_0 et u_1 (éventuellement à l'aide de l'étude de g).*
- *On montre par récurrence que (u_n) ne changera pas de variation.*
  - *Si $u_0 \leq u_1$, alors (u_n) est croissante.*

    Init. *Immédiat puisque par hypothèse, $u_0 \leq u_1$.*

    Hér. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_n \leq u_{n+1}$.*
    Comme f est croissante, on a $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, soit encore $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. D'où la propriété au rang $n+1$.

    Concl. *Par principe de récurrence, (u_n) est croissante.*
  - *Si $u_0 \geq u_1$, alors on montre de même que (u_n) est décroissante.*



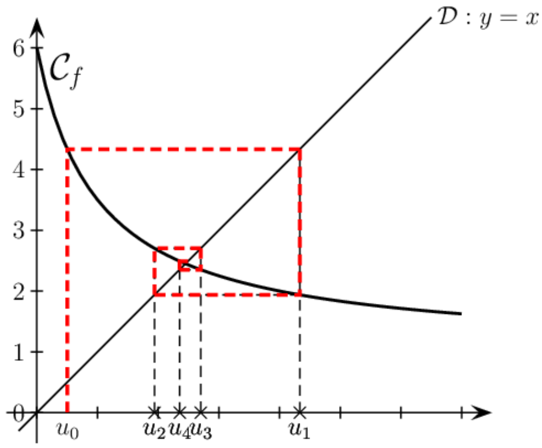
Cas où f est croissante : la monotonie de (u_n) dépend de u_0.

Mise en garde.

Bien que la fonction f soit croissante, la suite (u_n) ne l'est pas forcément : elle peut être croissante si $u_0 \leq u_1$, ou décroissante si $u_0 \geq u_1$.

Si la fonction f est décroissante

Dans ce cas, la suite (u_n) n'est plus monotone, comme on peut le constater sur l'exemple suivant.



Cas où f est décroissante : diagramme en "escargot".

En revanche, on observe que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) des termes pairs et impairs de (u_n) sont monotones et de monotonie contraire. Cela sera toujours le cas.

Méthode.

Si la fonction f est décroissante, alors on pose $h = f \circ f$. Puisque f est décroissante, h est croissante. De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = h(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2n+3} = h(u_{2n+1}).$$

On est donc ramené au cas de deux suites récurrentes (u_{2n}) et (u_{2n+1}) pour une fonction croissante h. On peut donc appliquer les résultats de la section précédente :

- *si $u_0 \leq u_2$, alors en composant par f décroissante, on a $u_1 \geq u_3$: la suite (u_{2n}) est croissante et la suite (u_{2n+1}) est décroissante.*
- *si $u_0 \geq u_2$, alors de même $u_1 \leq u_3$: la suite (u_{2n}) est décroissante et la suite (u_{2n+1}) est croissante.*

Convergence de la suite

Limites finies possibles

On suppose que la suite (u_n) converge vers une **limite finie** ℓ qu'on cherche à déterminer. Pour cela, nous avons besoin de la notion de point fixe.

Définition.

On appelle *point fixe de f* toute solution de l'équation $f(x) = x$.
Graphiquement, il s'agit de l'abscisse des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec la droite $\mathscr{D} : y = x$.

Théorème 1

Si f est **continue** sur un intervalle stable J et si (u_n) converge vers $\ell \in J$ alors $f(\ell) = \ell$, et ℓ est un point fixe de f.

Preuve. Puisque (u_n) converge vers ℓ, alors $\lim u_{n+1} = \ell$. De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$ par continuité de f en $\ell \in J$. On peut donc passer à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, ce qui nous donne $\ell = f(\ell)$. $\square$

Méthode.

Pour déterminer les limites finies possibles de la suite (u_n), on cherche les points fixes de f, qui sont aussi les points d'annulation de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur J

Convergence lorsque f est croissante

Lorsque f est croissante, nous avons vu que la suite (u_n) est monotone (croissante ou décroissante). Selon que l'intervalle stable J est bornée ou non, on pourra utiliser le théorème de la limite monotone pour prouver la convergence de la suite. On rappelle son énoncé.

Théorème 2 (*de la limite monotone*)

- Toute suite croissante et majorée converge.
  Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et minorée converge.
  Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Convergence lorsque f est décroissante

Lorsque f est décroissante, nous avons vu que (u_n) n'est pas monotone. Cependant les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) le sont. On pourra alors tenter dans certains cas de montrer qu'elles sont adjacentes.

Définition.

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* si :

(1) (u_n) est croissante ; (2) (v_n) est décroissante ; (3) $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) satisfont ces conditions, on pourra alors utiliser le

Théorème 3 (*des suites adjacentes*)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Alors **elles convergent vers la même limite** $\ell \in \mathbb{R}$, et on a de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$

On peut alors conclure que la suite (u_n) converge vers ℓ à l'aide de la

Propriété 4

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent **vers la même limite** ℓ, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Preuve. Supposons que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ. Alors si K est un intervalle ouvert contenant ℓ, seuls un nombre fini de termes d'ordre pair sont hors de K, et seuls un nombre fini de termes d'ordre impair sont hors de K. Par conséquent, il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite (u_n) hors de K : (u_n) converge vers ℓ. $\square$

Convergence par l'inégalité des accroissements finis

On peut aussi utiliser dans certains cas l'inégalité des accroissements finis pour montrer que la distance entre u_n et sa limite possible ℓ tend vers 0. On en rappelle l'énoncé.

Théorème 5 *(Inégalité des accroissements finis)*

Si f est **dérivable** sur J, et s'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in J$, $|f'(x)| \leq M$, alors

$$\forall (a,b) \in J^2, \quad |f(b) - f(a)| \leq M|b-a|.$$

Méthode.

Pour montrer la convergence de (u_n) vers un point fixe $\ell \in J$ à partir de l'inégalité des accroissements finis, on procèdera ainsi :

- *on majore $|f'|$ par une constante M sur l'intervalle stable J contenant les termes de la suite. Il faut pour que cette méthode fonctionne que $0 \leq M < 1$;*
- *on applique l'inégalité des accroissements finis à f avec $b = u_n$ et $a = \ell$ pour obtenir*

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq M|u_n - \ell|.$$

- *On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $|u_n - \ell| \leq M^n|u_0 - \ell|$ ».*

Init. *$\mathscr{P}(0)$ découle de l'inégalité des accroissements finis avec $a = \ell$ et $b = u_0$.*

Hér. *Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.*
Par hypothèse de récurrence, on a $|u_n - \ell| \leq M^n|u_0 - \ell|$. Alors on a :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq M|u_n - \ell| \leq M \times M^n|u_0 - \ell| = M^{n+1}|u_0 - \ell|.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Concl. *Par principe de récurrence, $|u_n - \ell| \leq M^n|u_0 - \ell|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

- *Si $M \in [0, 1[$, $(M^n|u_0 - \ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ par encadrement.*

Calcul approché du point fixe. Si $J = [a, b]$, le calcul précédent nous donne une estimation de l'erreur :

$$|u_n - \ell| \leq M^n|u_0 - \ell| \leq M^n|b-a|.$$

Ainsi, u_n constitue une estimation du point fixe ℓ de f avec une précision au moins égale à $M^n|b-a|$.

Programmation

On présente ici quelques programmes classiques sur les suites récurrentes linéaires.

Calcul du n-ième terme de la suite

Pour calculer le n-ième terme de la suite (u_n) à l'aide de `Scilab`, on commence par définir la fonction f.

```
function y = f(x)
        y= ...
endfunction
```

On obtient alors le n-ième terme de la suite (u_n) à l'aide de la fonction suivante, qui prend en entrée l'entier n correspondant au rang u_n souhaité, et α le premier terme de la suite.

```
function u = suite(n,alpha)
        u=alpha
        for k=1:n
                u=f(u)
        end
endfunction
```

Calcul approché du point fixe

Supposons avoir établi comme précédemment que

$$|u_n - \ell| \leq M^n |b-a|.$$

On peut alors obtenir une valeur approchée de ℓ à un ε fixé près. Pour cela, on peut utiliser le programme `Scilab` suivant, qui prend en entrée les réels M, a, b, ε, et qui renvoie le terme u_n pour n suffisamment grand.

```
function u = approx(M,a,b,eps)
        n=0
        while M^n * (b-a) >= eps then
                n=n+1
        end
        u=suite(n)
endfunction
```

Exemples d'étude de suites

On propose ici deux études de suites récurrentes. D'autres exemples sont proposés dans les TD0 et TD23. Voir aussi le sujet d'Edhec 2016, Exercice 1.

Un exemple où f est croissante

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{u_n} - 1 \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est strictement positif.
2. Déterminer le sens de variations de (u_n).
3. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Un exemple où f est décroissante

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2}{1+x}$. On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et à valeurs dans $[\frac{1}{2}, 2]$.
2. Déterminer les limites finies possibles de (u_n).
3. `Scilab`.
   (a) Écrire une fonction d'en-tête `function v = suite(n)` qui prend en entrée un entier `n` et qui renvoie un vecteur `v` contenant les n premiers termes de la suite (u_n).
   (b) Représenter graphiquement les 40 premiers termes de la suite (u_n). Vers quelle limite la suite (u_n) semble-t-elle converger ?
4. Dans cette question, on montre la convergence de la suite (u_n) à l'aide des suites extraites paires et impaires.
   (a) Que dire du sens de variations des suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ? En déduire qu'elles convergent.
   (b) Résoudre l'équation $f \circ f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
5. Dans cette question, on montre la convergence de la suite (u_n) à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{2}{3}|u_n - 1|$.
   (b) En déduire la convergence de (u_n).