Complément 4

Preuve du théorème de transfert

Théorème 1 (de transfert)

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f_X nulle en dehors de $]a,b[$ $(a,b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$, et soit $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points.

$E(\varphi(X))$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_a^b \varphi(x) f_X(x)\mathrm{dx}$ converge absolument. Et en cas de convergence absolue, on a :

$$E(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(x) f_X(x)\mathrm{dx}.$$

Preuve. On se limite ici au cas où $X(\Omega) = \mathbb{R}$ (c'est à dire $a = -\infty, b = +\infty$), φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $\varphi' > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Remarquons tout d'abord que φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et sa bijection réciproque φ^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, comme φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que φ' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors φ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Comme φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, $\varphi(X)$ est une variable aléatoire réelle.

Déterminons sa fonction de répartition.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $[\varphi(X) \leq x] = [X \leq \varphi^{-1}(x)]$ car φ^{-1} est croissante sur $\mathbb{R}$.
En notant F_X la fonction de répartition de X et $F_{\varphi(X)}$ la fonction de répartition de $\varphi(X)$, on a alors :

$$F_{\varphi(X)}(x) = F_X(\varphi^{-1}(x)).$$

Montrons que $\varphi(X)$ est à densité.
Comme X est une variable aléatoire à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Comme φ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $F_{\varphi(X)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points donc $\varphi(X)$ est une variable aléatoire à densité.
On en détermine alors sa densité : pour tout réel x en lequel F_X est dérivable, on a $F'_{\varphi(X)}(x) = F'_X(\varphi^{-1}(x)) \times (\varphi^{-1})'(x)$ donc la variable aléatoire $\varphi(X)$ admet pour densité la fonction

$$x \mapsto f(\varphi^{-1}(x)) \times (\varphi^{-1})'(x).$$

On étudie maintenant l'existence et l'expression de $E(\varphi(X))$.
$\varphi(X)$ admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(\varphi^{-1}(x)) \times (\varphi^{-1})'(x)\mathrm{d}x$ converge ou encore si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x f(\varphi^{-1}(x)) \times (\varphi^{-1})'(x)|\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(\varphi^{-1}(x)) \times (\varphi^{-1})'(x)\mathrm{d}x$ converge.
Or, par le changement de variable $x = \varphi(t)$ (possible car φ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$), les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(\varphi^{-1}(x)) \times (\varphi^{-1})'(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.
Ainsi, $\varphi(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f(t)\mathrm{d}t$ converge absolument, et on a dans ce cas (toujours par théorème de changement de variable) :

$$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(\varphi^{-1}(x)) \times (\varphi^{-1})'(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f(t)\mathrm{d}t.$$

$\square$