DM1

Correction du devoir maison

Exercice 1.1 (D'après Ecricome 2007)

1. Soit f la fonction définie sur $]-\infty, \ln 2[$ par $f(x) = \ln(2-e^x)$.

> **Rappel. Formule de Taylor-Young.**
> Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I. Alors pour tout $(x,a) \in I^2$, on a :
> $$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n).$$

La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-\infty, \ln 2[$, on a d'après la formule de Taylor-Young que pour x au voisinage de 0 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

On a $f(0) = \ln 1 = 0$.
Pour tout $x \in]-\infty, \ln 2[$, $f'(x) = \dfrac{-e^x}{2-e^x}$ donc $f'(0) = -1$.
Pour tout $x \in]-\infty, \ln 2[$, $f''(x) = \dfrac{-e^x(2-e^x)+e^x(-e^x)}{(2-e^x)^2} = \dfrac{-2e^x}{(2-e^x)^2}$ donc $f''(0) = -2$.
On en déduit que pour x au voisinage de 0, on a :

$$\boxed{\ln(2-e^x) = -x - x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).}$$

2. (a) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
On a $0 < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$ donc $1 < e^{1/k} \leq e^{1/2}$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $2 - e^{1/2} \leq 2 - e^{1/k} < 1$.
De plus, on a $e < 4$ donc par stricte croissance de la fonction racine sur $[0, +\infty[$, $e^{1/2} < 2$ donc $2 - e^{1/2} > 0$.
On a donc bien $\boxed{0 < 2 - e^{1/k} < 1}$.

   (b) On sait que pour tout $x \in]0,1[$, $\ln x < 0$. Par 2.(a), on en déduit que :
$$\boxed{\forall k \geq 2, \quad \ln(2-e^{1/k}) < 0.}$$

   (c) On applique le théorème de comparaison pour les séries à termes généraux de signes constants :
   - Pour tout $k \geq 2$, $\ln(2-e^{1/k}) < 0$. Donc le terme général de la série $\sum_{k\geq 2} \ln(2-e^{1/k})$ est de **signe constant** (négatif) ;
   - On a $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{k} = 0$ et par 1., $\ln(2-e^x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$ donc $\ln(2-e^{1/k}) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{k}$;
   - La série harmonique $\sum_{k\geq 1} \dfrac{1}{k}$ diverge.

   Donc par comparaison, la série de terme général $\ln(2-e^{1/k})$ diverge.

   (d) $(V_n)_{n\geq 2}$ est la suite des sommes partielles associée à la série de terme général $\ln(2-e^{1/k})$. Or, cette série diverge vers $-\infty$ en tant que série à termes négatifs divergente (par le théorème de la limite monotone, soit cette suite est minorée et dans ce cas elle converge, soit elle n'est pas minorée, et dans ce cas elle tend vers $-\infty$).
Ainsi on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty}$, et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

3. (a) On a pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}[\ln(2-e^{1/k})-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)] &= \sum_{k=2}^{n}\ln(2-e^{1/k})-\sum_{k=2}^{n}(\ln(k-1)-\ln k)\\ &= V_n-(\ln 1-\ln n)\ \text{ par télescopage}\\ &= \ln(\exp V_n)+\ln n=\ln u_n+\ln n=\ln(nu_n).\end{aligned}$$

(b) On a d'après 1., $\ln(2-e^x) = -x - x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ et $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{k}=0$ donc

$$\ln(2-e^{1/k}) = -\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

D'autre part, on a $\ln(1-x) = x-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$ et $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{k}=0$ donc :

$$\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{k}\right)^2+o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Par somme, on obtient :

$$\ln(2-e^{1/k})-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k}+\frac{1}{2k^2}+\underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{1}{2k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Pour obtenir l'équivalent demandé, on prend le premier terme du développement limité obtenu :

$$\boxed{\ln(2-e^{1/k})-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\underset{k\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2k^2}.}$$

(c) On utilise le théorème de comparaison de séries à termes généraux de signes constants :

- $\ln(2-e^{1/k})-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\underset{k\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2k^2}$;
- Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{2k^2}\leq 0$;
- La série de Riemann $\sum\limits_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$ converge ($2>1$)

Par comparaison, on en déduit que la série $\sum\limits_{k\geq 2}[\ln(2-e^{1/k})-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)]$ converge. Notons $S=\sum\limits_{k=2}^{+\infty}[\ln(2-e^{1/k})-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)]$ la somme de cette série.

On a d'après 3.(a), $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(nu_n)=S$. Par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = e^S.$$

Si on note $K=e^S$ alors on a $K>0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{K/n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{nu_n}{K}=1$ d'où $\boxed{u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{K}{n}}$.

On en déduit la nature de la série des u_n comme suit :

- On a $u_n\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{K}{n}$;
- On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{K}{n}\geq 0$;
- La série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge.

Par comparaison, on en déduit que $\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ diverge}}$.

4. (a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n = \exp(V_n) > 0$ et on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\exp(V_{n+1})}{\exp V_n} &= \exp(V_{n+1} - V_n) = \exp\left(\sum_{k=2}^{n+1} \ln(2 - e^{1/k}) - \sum_{k=2}^{n} \ln(2 - e^{1/k})\right) \\ &= \exp(\ln(2 - e^{1/(n+1)})) = 2 - e^{1/(n+1)} < 1 \quad \text{d'après 2.(a).}\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_{n+1} < u_n$.
La suite $\boxed{(u_n)_{n\geq 2} \text{ est donc strictement décroissante}}$.

(b) On revient à la définition de suites adjacentes.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=2}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=2}^{2n} (-1)^k u_k = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} \\ &= -u_{2n+1} + u_{2n+2} \leq 0.\end{aligned}$$

Donc la suite $(S_{2n})_{n\geq 1}$ est décroissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= \sum_{k=2}^{2n+3} (-1)^k u_k - \sum_{k=2}^{2n+1} (-1)^k u_k = (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+3} u_{2n+3} \\ &= u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0.\end{aligned}$$

Donc la suite $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ est croissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k u_k - \sum_{k=1}^{2n} k u_k = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = -u_{2n+1}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} (-u_{2n+1}) = 0$ d'après 2.(d).

On en déduit que $\boxed{\text{les suites } (S_{2n})_{n\geq 1} \text{ et } (S_{2n+1})_{n\geq 1} \text{ sont adjacentes}}$.

(c) Par le théorème des suites adjacentes, on en déduit que $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ convergent vers la même limite.

Comme ce sont les suites extraites d'indices pairs et impairs, on en déduit que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge. Or, c'est la suite des sommes partielles associée à la série de terme général $(-1)^n u_n$. Donc par définition, $\boxed{\text{la série de terme général } (-1)^n u_n \text{ converge}}$.

Déjà vu ?
La série étudiée à la question 4. est dîtes alternée car son terme général est de la forme $(-1)^n u_n$ avec $u_n > 0$. On a déjà rencontré de telles séries en TD avec la série harmonique alternée. C'est un thème classique dans les épreuves de concours. Les arguments utilisés sont souvent les mêmes, et il est intéressant de les connaitre en toute généralité (même si ces résultats sont hors programme). Pour cela, voir le :
☞ **Complément de cours 1. Autour des séries alternées.**