DM1

Devoir maison à rendre le 16/09/2019

Exercice 1

1. À l'aide de la formule de Taylor-Young, montrer que lorsque x est au voisinage de 0 on a :

$$\ln(2-e^x) = -x - x^2 + o(x^2).$$

2. (a) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

$$2 - e^{1/k} \in]0,1[.$$

   (b) En déduire le signe de $\ln(2-e^{1/k})$, pour tout entier k supérieur ou égal à 2.

   (c) Quelle est la nature de la série de terme général $\ln(2-e^{1/k})$?

   (d) Pour n entier supérieur ou égal à 2, on pose :

$$V_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(2-e^{1/k}) \text{ et } u_n = \exp V_n.$$

   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3. (a) Montrer que :

$$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^{n} \Big[\ln(2-e^{1/k}) - \ln(1-\frac{1}{k})\Big].$$

   (b) Déterminer un équivalent, quand k tend vers $+\infty$, de $\ln(2-e^{1/k}) - \ln(1-\frac{1}{k})$.

   (c) En déduire que u_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $\frac{K}{n}$ avec $K>0$.
   Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

4. On pose

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k u_k.$$

   (a) Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.

   (b) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont deux suites adjacentes.

   (c) En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.