DM11

Correction du devoir maison

Exercice 1 (Ecricome 2017)

1. (a) Par croissances comparées, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0.}$

   Par composition de limites, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1.}$

   (b) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle, et pour $x>0$, $f'(x)=\ln(x)+1$. De plus, on a $f'(x)>0$ ssi $\ln x>-1$ ssi $x>e^{-1}$.
   On a le tableau de variations suivant :

x	0		e^{-1}		1
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0

   g est dérivable sur $]0,1]$ comme composée de fonctions dérivables, et pour $x>0$, $g'(x)=f'(x)e^{x\ln x}$.
   $g'(x)$ est donc du signe de $f'(x)$. On a le tableau de variations suivant :

x	0		e^{-1}		1
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	1

   (c) g est continue sur $]0,1]$ et admet une limite finie en 0 (qui vaut 1). L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ est donc faussement généralisée en 0. $\boxed{\text{Elle converge donc.}}$

2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction $t\mapsto f(t)^n$ est continue sur $]0,1]$ car f l'est, et elle admet une limite finie en 0 (qui vaut 0). Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)^n\mathrm{d}t$ est faussement généralisée en 0, et converge donc bien. Ainsi $\boxed{u_n \text{ existe bien pour tout } n\in\mathbb{N}.}$

   (b) D'après les variations de f obtenues en 1.(b), on a pour tout $t\in]0,1]$:
$$|f(t)|\leq e^{-1} \quad \text{d'où} \quad |f(t)^n|\leq e^{-n}.$$
   La fonction $|f^n|$ est continue sur $]0,1]$ et admet une limite finie en 0, donc l'intégrale $\int\limits_0^1 |(t\ln t)^n|\,\mathrm{d}t$ converge. Par croissance de l'intégrale, on a :
$$\int_0^1 |(t\ln t)^n|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 e^{-n}\,\mathrm{d}t, \quad \text{soit} \quad \int_0^1 |(t\ln t)^n|\,\mathrm{d}t\leq e^{-n}.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$|u_n| \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 |(t\ln t)^n|\,\mathrm{d}t \leq \frac{e^{-n}}{n!}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}}{n!} = 0$. Par le théorème d'encadrement, la suite $\boxed{u \text{ converge et } \lim u_n = 0.}$

(c) On a $\boxed{u_0 = \displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1.}$

Pour calculer $u_1 = \displaystyle\int_0^1 t\ln t\,\mathrm{d}t$, effectuons une intégration par parties sur un **segment**, l'intégrale étant généralisée en 0. Soit $A \in]0,1[$.

$$\begin{array}{c|ccc} + & \ln(t) & & t \\ & & \searrow & \\ - & \dfrac{1}{t} & \overset{\int}{\longleftarrow} & \dfrac{t^2}{2} \end{array}$$

Les fonctions $u : t \mapsto \frac{t^2}{2}$ et $v : t \mapsto \ln t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[A,1]$, et on a :

$$\begin{aligned} \int_A^1 t\ln t\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_A^1 - \int_A^1 \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}A^2\ln A - \left[\frac{t^2}{4}\right]_A^1 \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{A^2}{4} - \frac{A^2\ln A}{2} \end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{A\to 0} A^2\ln A = 0$. En faisant tendre A vers 0 (l'intégrale en jeu converge), nous obtenons $\boxed{u_1 = -\frac{1}{4}}$.

(d) On cherche à calculer $\displaystyle\int_0^1 (t\ln(t))^n \mathrm{d}t$. De même que précédemment, on va effectuer des intégrations par parties successives sur un **segment**, l'intégrale étant généralisée en 0. Soit $A \in]0,1[$.

$$\begin{array}{c|ccc} + & \ln(t)^n & & t^n \\ & & \searrow & \\ - & \dfrac{n}{t}\ln(t)^{n-1} & \overset{\int}{\longleftarrow} & \dfrac{t^{n+1}}{n+1} \end{array}$$

Les fonctions $u : t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$ et $v : t \mapsto (\ln t)^n$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[A,1]$, et on a :

$$\begin{aligned} \int_A^1 t^n(\ln t)^n\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(\ln t)^n\right]_A^1 - \int_A^1 \frac{nt^{n+1}(\ln t)^{n-1}}{(n+1)t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{A^{n+1}(\ln A)^n}{n+1} - \frac{n}{n+1}\int_A^1 t^n(\ln t)^{n-1}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{A\to 0} A^{n+1}(\ln A)^n = 0$. En faisant tendre A vers 0 (l'intégrale converge), nous obtenons :

$$n!u_n = -\frac{n}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

On réitère l'intégration par parties :

$$\begin{array}{c|ccc} + & \ln(t)^{n-1} & & t^n \\ & & \searrow & \\ - & \dfrac{n-1}{t}\ln(t)^{n-2} & \overset{\int}{\longleftarrow} & \dfrac{t^{n+1}}{n+1} \end{array}$$

Les fonctions $u : t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$ et $v : t \mapsto (\ln t)^{n-1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[A, 1]$, et on a :

$$\begin{aligned}\int_A^1 t^n(\ln t)^{n-1}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(\ln t)^{n-1}\right]_A^1 - \int_A^1 \frac{(n-1)t^{n+1}(\ln t)^{n-2}}{(n+1)t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{A^{n+1}(\ln A)^{n-1}}{n+1} - \frac{n(n-1)}{n+1}\int_A^1 t^n(\ln t)^{n-2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{A\to 0} A^{n+1}(\ln A)^{n-1} = 0$, et en faisant tendre A vers 0 (l'intégrale converge), nous obtenons :

$$n!u_n = \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-2}\,\mathrm{d}t$$

En continuant ce procédé, nous avons pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$n!u_n = (-1)^k\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)^k}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-k}\,\mathrm{d}t$$

En particulier, on a pour $k = n$ que :

$$n!u_n = (-1)^n\frac{n!}{(n+1)^n}\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = (-1)^n\frac{n!}{(n+1)^n}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = (-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Ainsi on a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.}$

(e) On a :

- pour $n \geq 1$, $\quad 0 \leq |u_n| = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$,
- $\sum \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum |u_n|$ converge. La série $\boxed{\sum u_n \text{ converge donc absolument, donc converge.}}$

(f) On propose deux fonctions.

```
//avec calcul vectoriel
function S = somme(n)
    k = 0:n
    u = (-1).^k ./(k+1).^(k+1)
    S = sum(u)
endfunction
```

```
//par une boucle for
function S = sommebis(n)
    S = 0
    for k = 0:n
        S =  S + (-1)^k/(k+1)^(k+1)
    end
endfunction
```

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons $I = [-\frac{1}{e}, 0]$ et $f : t \mapsto e^t$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, et pour tout $t \in I$, $|f^{(n+1)}(t)| = e^t \leqslant 1$. Par l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n, pour tout $x \in I$, on a :

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k\right| \leqslant \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Pour tout entier naturel k, $f^{(k)} = f$. Pour $x \in I$, on a $|x| \leq \frac{1}{e}$, puis $|x|^{n+1} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$ et donc :

$$\boxed{\forall x \in I, \quad \left|e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.}$$

(b) Soit $x \in]0,1]$. Par l'étude de la question 1.b., $x \ln x \in [-\frac{1}{e}, 0]$. On peut appliquer le résultat de la question précédente :

$$\left| e^{x \ln x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x \ln x)^k}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$$

Les fonctions $x \mapsto \left| e^{x \ln x} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(x \ln x)^k}{k!} \right|$ et $x \mapsto \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$ sont continues sur $]0,1]$ et l'intégrale $\int\limits_0^1 \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!} \, \mathrm{d}x$ est convergente. Par le théorème de comparaison pour des intégrales de fonctions continues positives, l'intégrale $\int\limits_0^1 \left| e^{x \ln x} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(x \ln x)^k}{k!} \right| \mathrm{d}x$ converge. Par croissance de l'intégrale, on a de plus :

$$\int_0^1 \left| e^{x \ln x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x \ln x)^k}{k!} \right| \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!} \, \mathrm{d}x$$

soit

$$\int_0^1 \left| e^{x \ln x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x \ln x)^k}{k!} \right| \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$$

Par ailleurs, par linéarité pour des intégrales convergentes, $I - S_n = \int\limits_0^1 \left(e^{x \ln x} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(x \ln x)^k}{k!} \right) \mathrm{d}x$. On termine par l'inégalité triangulaire :

$$\boxed{|I - S_n| \leqslant \int_0^1 \left| e^{x \ln x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x \ln x)^k}{k!} \right| \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}}$$

(c) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$. Le théorème des gendarmes appliqué à l'encadrement de la question précédente donne $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ existe (ce qu'on savait depuis la question 2.(e)), et vaut I. Ainsi on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} = I.$$

Le changement d'indice $n = k+1$ donne enfin :

$$\boxed{I = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.}$$

(d) On propose la fonction suivante.

```
function I = estimation(eps)
    n = 0
    while 1/ (exp(n+1)*factorial(n+1)) >= eps
        n = n+1
    end
    I = somme(n)
endfunction
```

Exercice 2 (Edhec 2005)

1. (a) On sait que $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Il est donc de dimension 0 ou 1. Comme de plus Tr n'est pas l'application identiquement nulle (car par exemple $\mathrm{Tr}(I_n) = n \neq 0$), on en déduit que $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) \neq \{0\}$. Ainsi on a $\dim \mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = 1$ et $\boxed{\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{R}}$.

(b) Par le théorème du rang, on a :

$$\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \dim \operatorname{Ker}(\operatorname{Tr}) + \dim \operatorname{Im}(\operatorname{Tr}).$$

On en déduit donc que $\dim \operatorname{Ker}(\operatorname{Tr}) = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \operatorname{Im}(\operatorname{Tr}) \boxed{= n^2 - 1}$.

Remarque. Ainsi $\operatorname{Ker}(\operatorname{Tr})$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On aurait pu le deviner, puisque c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Voir à ce propos le complément de cours **Complément 2. Formes linéaires et hyperplans**.

(c) On a $\dim \operatorname{Vect}(I) = 1$ puisque $I \neq 0_{n,n}$, donc :

$$\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \dim \operatorname{Ker}(\operatorname{Tr}) + \dim \operatorname{Vect}(I).$$

Montrons que $\operatorname{Ker}(\operatorname{Tr}) \cap \operatorname{Vect}(I) = \{0\}$: soit $M \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Tr}) \cap \operatorname{Vect}(I)$. On a :

- $M \in \operatorname{Vect}(I)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I$.
- D'autre part, M appartient à $\operatorname{Ker}(\operatorname{Tr})$, donc on a :

$$0 = \operatorname{Tr}(M) = \operatorname{Tr}(\lambda I) = n\lambda.$$

Donc $\lambda = 0$ et $M = \lambda I = 0$. On a donc $\operatorname{Ker}(\operatorname{Tr}) \cap \operatorname{Vect}(I) = \{0\}$.

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\operatorname{tr}) \oplus \operatorname{Vect}(I)}$$

2. (a) f est clairement à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que f est linéaire : soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda M + \mu N) &= (\lambda M + \mu N) + \operatorname{Tr}(\lambda M + \mu N)I \\ &= \lambda M + \mu N + (\lambda \operatorname{Tr}(M) + \mu \operatorname{Tr}(N))I \\ &= \lambda(M + \operatorname{Tr}(M)I) + \mu(N + \operatorname{Tr}(N)I) = \lambda f(M) + \mu f(N). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est bien un endomorphisme de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

(b) Pour tout $M \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Tr})$, on a :

$$f(M) = M + \operatorname{Tr}(M)I = M.$$

Donc M est vecteur propre de f associé à la valeur propre 1. En particulier on a $\operatorname{Ker}(\operatorname{Tr}) \subset E_1(f)$ et $\dim(E_1(f)) \geq n^2 - 1$.

D'autre part, on a :

$$f(I) = I + \operatorname{Tr}(I)I = I + nI = (n+1)I.$$

Donc I est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $n+1$. En particulier on a $\dim E_{n+1}(f) \geq 1$.

On obtient donc :

$$n^2 = (n^2 - 1) + 1 \leq \dim E_1(f) + \dim E_{n+1}(f) \underset{\text{cours}}{\leq} \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} E_\lambda(f) \leq n^2.$$

On en déduit donc que $\boxed{\operatorname{Sp}(f) = \{1, n+1\}}$, que $\dim E_1(f) = n^2 - 1$ et $\dim E_{n+1}(f) = 1$, et que $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$ (puisque $\dim E_1(f) + \dim E_{n+1}(f) = n^2$).

Notons enfin que $0 \notin \operatorname{Sp}(f)$, donc f est injective. Comme c'est un endomorphisme en dimension finie, f est donc bijective. $\boxed{f \text{ est donc un automorphisme de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

3. (a) On doit montrer que $g^2 - 2g + \operatorname{Id} = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Soit donc $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} g^2(M) - 2g(M) + M &= g(M + \operatorname{Tr}(M)J) - 2(M + \operatorname{Tr}(M)J) + M \\ &= g(M) + \operatorname{Tr}(M)g(J) - 2M - 2\operatorname{Tr}(M)J + M \quad \text{car } g \text{ linéaire} \\ &= M + \operatorname{Tr}(M)J + \operatorname{Tr}(M)(J + 0J) - 2\operatorname{Tr}(M)J - M \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.

(b) Les valeurs propres **possibles** sont **parmi** les racines de $X^2-2X+1=(X-1)^2$. Donc 1 est l'unique valeur propre possible de g. De plus on a pour tout $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$:

$$g(M)=M+\mathrm{Tr}(M)J=M.$$

Donc M est un vecteur propre de g associé à la valeur propre 1, et on a $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \subset E_1(g)$. Ainsi $\boxed{\text{1 est bien valeur propre de } g\text{, et c'est l'unique valeur propre de } g.}$

(c) Supposons que g soit diagonalisable. Puisque g n'a qu'une seule valeur propre 1, alors on aurait $g=\mathrm{Id}$. Or on a par exemple :

$$g(I)=I+\mathrm{Tr}(I)J=I+nJ \neq I.$$

Donc $\boxed{g \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

Autre méthode. On calcule $E_1(g)$. On a :

$$g(M)=M \Leftrightarrow M+\mathrm{Tr}(M)J=M \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(M)J=0 \underset{J\neq 0}{\Leftrightarrow} \mathrm{Tr}(M)=0.$$

Ainsi $E_1(g)=\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \neq \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc g n'est pas diagonalisable.

Exercice 3 (Extrait de Ecricome 2011)

1. (a) Pour tout réel t, on a :

$$F_{Y_n}(t)=P(Y_n \leq t)=P(X_1\leq t,\ X_2 \leq t, \dots,\ X_n\leq t) \underset{\text{indép.}}{=} P(X_1\leq t)P(X_2\leq t)\dots P(X_n \leq t)$$
$$\boxed{=F_{X_1}(t)F_{X_2}(t)\dots F_{X_n}(t).}$$

(b) On obtient alors pour tout $t\in\mathbb{R}$: $\boxed{F_{Y_n}(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ (1-e^{-t})^n & \text{si } t\geq 0\end{cases}.}$

(c) La fonction F_{Y_n} est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 comme produit des F_{X_i} qui le sont. Donc Y_n est une variable à densité.

Pour tout $t\neq 0$, on a :

$$F'_{Y_n}(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ ne^{-t}(1-e^{-t})^{n-1} & \text{si } t>0\end{cases}.$$

$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ est bien une densité de probabilité de la variable aléatoire } Y_n}$ (en fixant pour valeur arbitraire 0 en 0).

2. (a) Posons $T_{n+1}=\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a :

$$F_{T_{n+1}}(t)=P\left(\frac{X_{n+1}}{n+1}\leq t\right)=P(X_{n+1}\leq (n+1)t)=F_{X_{n+1}}((n+1)t)\boxed{=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ 1-e^{-(n+1)t} & \text{si } t\geq 0\end{cases}.}$$

(b) On reconnait ici la fonction de répartition d'une loi exponentielle $\mathscr{E}(n+1)$.

Donc $\boxed{T_{n+1} \text{ est à densité.}}$

Une densité de $T_{n+1}=\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est :

$$\boxed{d_{n+1}: t\in\mathbb{R}\mapsto \begin{cases}0 & \text{si } t\leq 0\\ (n+1)e^{-(n+1)t} & \text{si } t>0\end{cases}.}$$

Remarque. On sait par le cours que :

$$X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\lambda}X\hookrightarrow \mathscr{E}(1).$$

Ici, on a $X_{n+1}\hookrightarrow\mathscr{E}(1)$. On pouvait donc en déduire directement que $\dfrac{1}{n+1}X_{n+1}$ suit une loi $\mathscr{E}(n+1)$.
On l'a retrouvé ici en étudiant la fonction de répartition de $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.

3. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^x n\exp(nt)(1-\exp(-t))^{n-1}\mathrm{dt} = \int_0^x ne^t e^{(n-1)t}(1-\exp(-t))^{n-1}\mathrm{dt} = \int_0^x ne^t(e^t-1)^{n-1}\mathrm{dt}$$
$$= \left[(e^t-1)^n\right]_0^x \boxed{= (e^x-1)^n}$$

4. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n est une variable aléatoire à densité dont f_n est une densité.

Init. Pour $n = 1$, $Z_1 = X_1$ suit une loi exponentielle dont une densité est $f_1 : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \exp(-t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.
D'où la propriété au rang $n = 1$.

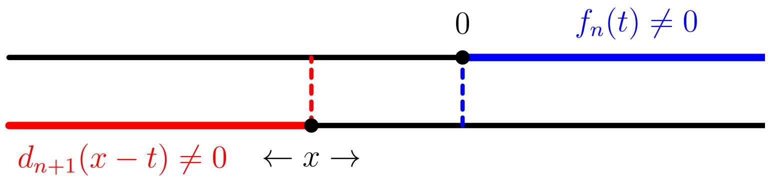
Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété au rang n, c'est-à-dire Z_n est à densité dont f_n est une densité. Montrons la propriété au rang $n+1$.

On a $Z_{n+1} = Z_n + \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$. Par le lemme de coalition, les variables Z_n et $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ sont indépendantes. De plus, la densité de $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ (par exemple) est bornée. Par le cours, on peut donc conclure que Z_{n+1} est à densité, et une densité de Z_{n+1} est donnée par :

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)d_{n+1}(x-t)\mathrm{dt}.$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$:
- $f_n(t) \neq 0$ si et seulement si $t > 0$.
- $d_{n+1}(x-t) \neq 0$ si et seulement si $x - t > 0$, soit si et seulement si $x > t$.

On a deux cas à considérer (qu'on détermine graphiquement) :



- si $x \leq 0$, $f_n(t)d_{n+1}(x-t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on a $h(x) = 0$.
- si $x > 0$, on a $f_n(t)d_{n+1}(x-t) \neq 0$ pour tout $t \in]0, x[$. On a dans ce cas :

$$h(x) = \int_0^x f_n(t)d_{n+1}(x-t)\mathrm{dt} = \int_0^x ne^{-t}(1-e^{-t})^{n-1}(n+1)e^{-(n+1)(x-t)}\mathrm{dt}$$
$$= (n+1)e^{-(n+1)x}\int_0^x ne^{nt}(1-e^{-t})^{n-1}\mathrm{dt} \underset{\text{quest. 3.}}{=} (n+1)e^{-(n+1)x}(e^x-1)^n$$
$$= (n+1)e^{-x}e^{-nx}(e^x-1)^n = (n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^n$$

Une densité de Z_{n+1} est donc bien f_{n+1}. D'où la propriété au rang $n+1$.

Concl. Par principe de récurrence, $\boxed{Z_n \text{ est une variable aléatoire à densité dont } f_n \text{ est une densité}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Puisque f_n est une densité commune à Y_n et Z_n, les variables Y_n et Z_n suivent la même loi. Ainsi $E(Y_n)$ existe si et seulement si $E(Z_n)$ existe, et elles ont la même valeur. Or par linéarité de l'espérance, Z_n admet bien une espérance qui vaut :

$$E(Z_n) = \sum_{k=1}^n \frac{E(X_k)}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Ainsi $\boxed{Y_n \text{ admet une espérance, et } E(Y_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.}$

Problème (Edhec 2007)

Partie 1

1. (a) D'après la formule des probabilités totales avec le système complet $(U,\bar{U})$, on a :

$$P(X=1)=P(\bar{B}_1)=P(U)P_U(\bar{B}_1)+P(\bar{U})P_{\bar{U}}(\bar{B}_1)=\frac{1}{2}\times\frac{n-1}{n}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{2}.$$

(b) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. L'événement $(X=k)$ est réalisé si et seulement si les $k-1$ premiers tirages amènent une boule blanche et le $k^{ème}$ amène une noire. Donc on a

$$\boxed{(X=k)=B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap\bar{B}_k.}$$

Alors, toujours avec la formule des probabilités totales, on a

$$P(X=k)=\frac{1}{2}P_U(B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap\bar{B}_k)+\frac{1}{2}P_{\bar{U}}(B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap\bar{B}_k)$$

Or, la famille d'événements $(B_i)_{i\geq 1}$ est mutuellement indépendante pour la probabilité P_U et pour la probabilité $P_{\bar{U}}$ car les tirages se font avec remise dans la même urne une fois le premier tirage effectué. On obtient donc

$$P(X=k)=\frac{1}{2}\left[P_U(B_1)\dots P_U(B_{k-1})P_U(\bar{B}_k)+P_{\bar{U}}(B_1)\dots P_{\bar{U}}(B_{k-1})P_{\bar{U}}(\bar{B}_k)\right]$$

Comme $P_U(B_i)=\frac{1}{n}$ et $P_{\bar{U}}(B_i)=\frac{n-1}{n}$ pour tout entier $n\geq 1$, on obtient

$$\boxed{P(X=k)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right]}$$

Pour $k=1$, le membre de gauche vaut $\frac{1}{2}$ et le menbre de droite vaut $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^0\frac{n-1}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)^0\frac{1}{n}\right]=\frac{1}{2}\times 1$. Donc la formule est encore vraie pour $k=1$.

2. Les séries $\displaystyle\sum_{k\geq 1}k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 1}k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$ sont des séries géométriques dérivées. Comme $\frac{1}{n}$ et $\frac{n-1}{n}$ sont dans $]0,1[$ alors ces séries convergent absolument ce qui prouve que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}kP(X=k)$ converge absolument et assure l'existence de l'espérance. De plus, on a

$$E(X)=\frac{1}{2}\left[\frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{n}\times\frac{1}{\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^2}\right]$$

Conclusion. $\boxed{X \text{ admet une espérance et } E(X)=\frac{n^2}{2(n-1)}}$.

3. En raisonnant comme à la question 1, on a:

$$P(Y=1)=P(B_1)=P(U)P_U(B_1)+P(\bar{U})P_{\bar{U}}(B_1)=\cdots=\frac{1}{2}=P(X=1)$$

$$P(Y=k)=P(\bar{B}_1\cap\cdots\cap\bar{B}_{k-1}\cap B_k)=\cdots=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right]=P(X=k)$$

puisque $P_U(\bar{B}_i)=P_{\bar{U}}(B_i)$ pour tout entier $i\geq 1$. Donc X et Y suivent la même loi.

4. Rappelons tout d'abord que la commande `grand(N,M,'uin',a,b)` crée une matrice de taille $N\times M$ dont chaque composante est une réalisation de la loi uniforme discrète sur $[\![a,b]\!]$.

La variable `hasard` contient le choix de l'urne. La suite nous indique que si `hasard==0`, alors les tirages se font dans l'urne V. En effet, il y a $n-1$ boules blanches dans l'urne V et une boule noire. Donc on tire une boule noire avec probabilité $\dfrac{1}{n}$ et des boules blanches avec probabilité $\dfrac{n-1}{n}$. On représente cela en considérant que les boules blanches sont numérotées de 2 à n, et la boule noire est numérotée 1. Tant que `grand(1,1,'uin',1,n)>1`, on obtient donc des boules blanches et on continue à faire des tirages en affectant $y = y+1$ à chaque tirage supplémentaire (la variable y compte le nombre de tirages effectués).

Si on fait les tirages dans l'urne U (cas considéré dans `else`), on a donc une boule blanche qu'on numérote 1, et $n-1$ boules noires qu'on numérotera de 2 à n. Tant qu'on obtient la boule blanche, c'est à dire tant que `grand(1,1,'uin',1,n)<2`, alors on continue à faire des tirages, et on remplace alors y par $y+1$. On obtient donc le programme suivant.

```
function y=cb(n)
    hasard = grand(1,1,'uin',0,1)
    y=1;
    if hasard == 0 then
        while grand(1,1,'uin',1,n)>1
            y=y+1;
        end
    else
        while grand(1,1,'uin',1,n)<2
            y=y+1;
        end
    end
endfunction
```

Partie 2

1. (a) La situation est la même qu'à la première partie concernant le choix initial de l'urne et le premier tirage. Donc on a $\boxed{P(X=1) = \frac{1}{2}}$.

   (b) Soit $k \geq 2$. On a encore
$$P(X=k) = \frac{1}{2}P_U(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \bar{B}_k) + \frac{1}{2}P_{\bar{U}}(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \bar{B}_k)$$
   Cette fois-ci, il n'y a plus, *a priori*, indépendance mutuelle des B_i pour P_U. On a par formule des probabilités composées
$$P_U(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \bar{B}_k) = P_U(B_1)P_{U\cap B_1}(B_2)\dots P_{U\cap B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(\bar{B}_k)$$
   Comme tout les tirages s'effectuent dans U (blanche à chaque tirage sauf à la fin mais on s'arrête), on obtient
$$P_U(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \bar{B}_k) = \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n}$$
   De même, *a priori*, il n'y a plus indépendance mutuelle pour $P_{\bar{U}}$. On a
$$P_{\bar{U}}(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \bar{B}_k) = P_{\bar{U}}(B_1)P_{\bar{U}\cap B_1}(B_2)\dots P_{\bar{U}\cap B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(\bar{B}_k)$$
   Ici, seul le premier tirage est effectué dans V, tous les suivants le sont dans U. Donc on a
$$P_{\bar{U}}(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \bar{B}_k) = \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\frac{n-1}{n}$$
   On en déduit que $\boxed{\forall k \geq 2,\ P(X=k) = \frac{1}{2}\frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}}$.

2. On a encore affaire à une série géométrique dérivée puisque
$$\forall k \geq 2,\ kP(X=k) = k\frac{1}{2}\frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} = \frac{n-1}{2}k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}$$
   d'où la convergence absolue et donc l'existence de l'espérance. Pour le calcul, il faut faire attention au terme pour $k=1$.
$$E(X) = \frac{1}{2}+\frac{n-1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty}k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} = \frac{1}{2}+\frac{n-1}{2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}-1\right) = \frac{n-1}{2}\times\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^2}+\frac{2-n}{2} = \frac{3n-2}{2(n-1)}$$

Conclusion. $\boxed{X \text{ admet une espérance et } E(X) = \dfrac{3n-2}{2(n-1)}}$.

3. On a encore $P(Y=1) = \frac{1}{2} = P(X=1)$. Soit $k \geq 2$. Alors on a

$$P(Y=k) = \frac{1}{2}\left[P_U(\bar{B}_1)P_{U\cap\bar{B}_1}(\bar{B}_2)\dots P_{U\cap\bar{B}_1\cap\dots\cap\bar{B}_{k-1}}(B_k) + P_{\bar{U}}(\bar{B}_1)P_{\bar{U}\cap\bar{B}_1}(\bar{B}_2)\dots P_{\bar{U}\cap\bar{B}_1\cap\dots\cap\bar{B}_{k-1}}(B_k)\right]$$

Concernant le premier terme, tous les tirages s'effectuent dans V sauf le premier. Pour le second terme, tous les tirages s'effectuent dans V. Ainsi on a

$$P(Y=k) = \frac{1}{2}\left[\frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\frac{n-1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n}\right] = P(X=k)$$

Donc X et Y suivent la même loi.

4. Dans cette situation, on choisit au hasard une des deux urnes. On teste ensuite dans quelle urne on est :

   - si `hasard==0`, alors on effectue le premier tirage dans l'urne V (contenant une boule noire et $n-1$ boules blanches). Si on obtient une boule noire, on s'arrête. Sinon, si on obtient une boule blanche, c'est à dire si `grand(1,1,'uin',1,n)>1`, alors on poursuit les tirages dans l'urne U. Tant qu'on obtient des boules blanches dans U, c'est à dire tant que `grand(1,1,'uin',1,n)<2`, alors on continue nos tirage. On s'arrête dès qu'on obtient une boule noire.
   - si `hasard == 1`, alors on effectue tous les tirages dans l'urne U (contenant une boule blanche et $n-1$ boules noires). Tant qu'on obtient des boules blanches, c'est à dire tant que `grand(1,1,'uin',1,n)<2`, on poursuit les tirages dans l'urne U.

```
function y=cb2(n)
    hasard = grand(1,1,'uin',0,1)
    y=1;
    if hasard == 0 then
        if grand(1,1,'uin',1,n)>1
            y=y+1;
            while grand(1,1,'uin',1,n)<2
                y=y+1;
            end
        end
    else
        while grand(1,1,'uin',1,n)<2
            y=y+1;
        end
    end
endfunction
```

Partie 3

1. (a) On a encore $\boxed{P(X=1) = \dfrac{1}{2}}$ puisque le protocole de tirage de la première boule ne change pas.

   (b) Soit $k \geq 2$. On a toujours

$$P(X=k) = \frac{1}{2}\left[P_U(B_1)P_{U\cap B_1}(B_2)\dots P_{U\cap B_1\cap\dots\cap B_{k-1}}(\bar{B}_k) + P_{\bar{U}}(B_1)P_{\bar{U}\cap B_1}(B_2)\dots P_{\bar{U}\cap B_1\cap\dots\cap B_{k-1}}(\bar{B}_k)\right]$$

Concernant le premier terme, tous les tirages s'effectuent dans U. Pour le second, tous les tirages s'effectuent dans V (comme dans la situation de la partie 1). Ainsi on obtient

$$\boxed{P(X=k) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right] = \frac{(n-1)^{k-1}+n-1}{2n^k}}$$

et, évidemment, la formule est encore vraie pour $k=1$.

(c) Comme la loi de X est la même que celle de la partie 1, alors

$$\boxed{X \text{ admet une espérance et } E(X) = \frac{n^2}{2(n-1)}}.$$

2. (a) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On a

$$P(Y = 2i) = \frac{1}{2}\left[P_U(\bar{B}_1)P_{U\cap\bar{B}_1}(\bar{B}_2)\dots P_{U\cap\bar{B}_1\cap\dots\cap\bar{B}_{2i-1}}(B_{2i}) + P_{\bar{U}}(\bar{B}_1)P_{\bar{U}\cap\bar{B}_1}(\bar{B}_2)\dots P_{\bar{U}\cap\bar{B}_1\cap\dots\cap\bar{B}_{2i-1}}(B_{2i})\right]$$

Dans chacun des deux termes, il y a alternance des tirages dans U et dans V. Comme le nombre de tirage est pair, il y a autant de tirages dans U que dans V. Il ne reste plus qu'à faire attention aux couleurs, ce qui donne

$$P(Y = 2i) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{i-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i+1} + \left(\frac{1}{n}\right)^{i+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}\right]$$

Par factorisation et réduction, on en conclut que $\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = 2i) = \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}\frac{n^2-2n+2}{2n^2}}$.

(b) Le principe est le même sauf qu'il y a un nombre impair de tirages donc un tirage de plus dans U (resp. V) que dans V (resp. U) pour le premier (resp. second) terme. Par factorisation et réduction, on en conclut que $\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = 2i+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i}$.

Pour $i = 0$, on a $P(Y = 2\times 0 + 1) = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^0 = \frac{1}{2}$. Ainsi la formule est encore valable pour $i = 0$.

(c) On pose: $E_{2m}(Y) = \sum_{k=1}^{2m} kP(Y = k)$ et $E_{2m+1}(Y) = \sum_{k=1}^{2m+1} kP(Y = k)$.

i. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En scindant la première somme, on obtient

$$\begin{aligned}
E_{2m}(Y) &= \sum_{k=0}^{m-1}(2k+1)P(Y = 2k+1) + \sum_{k=1}^{m} 2kP(Y = 2k)\\
&= \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}\frac{n-1}{n^2}\sum_{k=\cancel{0}1}^{m-1} k\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{k-1} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^k + \cancel{2}\frac{n^2-2n+2}{\cancel{2}n^2}\sum_{k=1}^{m} k\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{k-1}\\
&\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{n-1}{n^2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{n-1}{n^2}\right)^2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{n-1}{n^2}\right)^2} + \frac{n^2-2n+2}{n^2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{n-1}{n^2}\right)^2}
\end{aligned}$$

puisqu'on ce sont des séries convergentes. Donc $\boxed{\lim_{m\to+\infty} E_{2m}(Y) = \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)}}$.

ii. En procédant de même on a $E_{2m+1}(Y) = \sum_{k=0}^{m}(2k+1)P(Y = 2k+1) + \sum_{k=1}^{m} 2kP(Y = 2k)$. Un calcul identique assure que $\boxed{\lim_{m\to+\infty} E_{2m+1}(Y) = \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)}}$.

iii. Les suites $(E_{2m}(Y))_{m\geq 1}$ et $(E_{2m+1}(Y))_{m\geq 1}$ sont les suites extraites des rangs pairs et impairs de la suite des sommes partielles de la série définissant l'espérance éventuelle. Comme ces deux suites convergent et ont la même limite alors la suite des sommes partielles converge vers cette limite, d'où la convergence de la série. Comme la série est à termes positifs alors la convergence est aussi absolue.

Conclusion. $\boxed{Y \text{ admet une espérance et } E(Y) = \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)}}$.

3. (a) Pour $n = 2$, on a immédiatement

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = 2i) = \left(\frac{1}{4}\right)^i = \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \qquad \text{et} \qquad \forall i \in \mathbb{N},\ P(Y = 2i+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^i = \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+1}$$

donc X et Y suivent la même loi $\mathscr{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

(b) Dans le cas $n = 2$, la composition des deux urnes est identique donc passer d'une urne à l'autre ne change rien en termes de probabilités : les événements B_i redeviennent mutuellement indépendants. De plus, le nombre total de boules blanches est le même que le nombre total de boules noires (dans chaque urne) et on mesure « le temps d'attente » de la première boule noire (resp. blanche) donc la variable X (resp. Y) suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

4. Il est manifeste que $E(Y) = E(X)$ lorsque $n = 2$. Supposons maintenant que $n > 2$. Alors on a

$$E(Y) - E(X) = \frac{3n^2}{2(n^2 - n + 1)} - \frac{n^2}{2(n-1)} = \frac{n^2(n-2)^2}{2(n-1)(n^2 - n + 1)}$$

dont tous les facteurs sont strictement positifs ($\Delta(X^2 - X + 1) = -3 < 0$).
Conclusion. $\boxed{E(Y) \leq E(X) \text{ et } E(Y) = E(X) \Leftrightarrow n = 2}$.

5. On peut reprendre le programme de la partie 1 à l'identique. En effet, comme X est le rang d'apparition de la première boule noire, on poursuit les tirages jusqu'à en obtenir une. Ainsi tant qu'une boule blanche est tirée, on recommence dans la même urne selon le protocole, c'est à dire dans l'urne choisie au départ.