

Correction du devoir maison

Exercice 1

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a par croissance de la suite :

$$a_k \leq a_n$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 0 à $n-1$ on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_n, \quad \text{autrement dit} \quad \sum_{k=0}^{n-1} a_k \leq n a_n$$

En divisant par n qui est strictement positif on obtient :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \leq a_n$$

On a bien établi : $b_n \leq a_n$.

On étudie maintenant la monotonie de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Soit $n \geq 1$. On s'intéresse au signe de $b_{n+1} - b_n$. On remarque que :

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k = \frac{1}{n+1} \times \left(a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right) = \frac{1}{n+1} a_n + \frac{n}{n+1} \times \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k}_{=b_n} = \frac{1}{n+1} a_n + \frac{n}{n+1} b_n.$$

On a donc :

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} a_n + \frac{n}{n+1} b_n - b_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq 0} \times \underbrace{(a_n - b_n)}_{\geq 0}, \quad \text{donc} \quad \boxed{b_{n+1} - b_n \geq 0}.$$

Ainsi la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante

(b) Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle converge vers le réel ℓ , on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq \ell$. Or, on vient de montrer que $b_n \leq a_n$. On a donc :

$$b_n \leq \ell$$

Ceci prouve que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée. De plus, elle est croissante par la question 1.(a). On en déduit qu'elle converge vers un réel que l'on note ℓ' . Enfin, en passant à la limite dans l'inégalité $b_n \leq \ell$, on obtient bien :

$$\boxed{\ell' \leq \ell}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$b_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} a_k = \frac{1}{2n} \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^{2n-1} a_k \right) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k + \frac{1}{2n} \sum_{k=n}^{2n-1} a_k$$

Or, d'une part :

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{1}{2} \times \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k}_{=b_n} = \frac{b_n}{2}$$

D'autre part, pour tout $k \in \llbracket n; 2n - 1 \rrbracket$, on a (par croissance de la suite) :

$$a_k \geq a_n$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=n}^{2n-1} a_k \geq \underbrace{\sum_{k=n}^{2n-1} a_n}_{na_n} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{2n} \sum_{k=n}^{2n-1} a_k \geq \frac{a_n}{2}.$$

On a bien établi l'inégalité souhaitée :

$$\boxed{b_{2n} \geq \frac{b_n}{2} + \frac{a_n}{2}}.$$

(d) En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\ell' \geq \frac{\ell'}{2} + \frac{\ell}{2} \quad \text{donc} \quad \boxed{\ell' \geq \ell}$$

De plus on a établi en question 1.(b) l'inégalité $\ell' \leq \ell$. On en déduit que $\ell' = \ell$. Autrement dit :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}.$$

2. (a) On raisonne par récurrence sur n .

Init. Pour $n = 0$, le terme u_0 est bien défini et vaut 1. On a donc bien : $u_0 \geq 1$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que u_n est bien défini et que : $u_n \geq 1$. Montrons que :

$$u_{n+1} \text{ est bien défini et que : } u_{n+1} \geq 1$$

On a : $u_n^2 \geq 0$ et $u_n \geq 1$ donc : $u_n^2 + u_n \geq 1$. Le terme $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$ est donc bien défini (la quantité sous la racine est positive) et par croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$:

$$u_{n+1} \geq \sqrt{1} \quad \text{autrement dit} \quad \boxed{u_{n+1} \geq 1}$$

D'où la propriété voulue par principe de récurrence.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \geq 0$ donc :

$$u_n^2 + u_n \geq u_n^2$$

Par croissance de la fonction racine on en déduit :

$$\underbrace{\sqrt{u_n^2 + u_n}}_{u_{n+1}} \geq \sqrt{u_n^2}$$

Enfin, $u_n \geq 0$ donc $\sqrt{u_n^2} = u_n$. On a donc établi l'inégalité :

$$\boxed{u_{n+1} \geq u_n}$$

Ceci prouve que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. On a donc deux possibilités (par théorème de limite monotone) :

- 1) soit cette suite converge,
- 2) soit elle diverge vers $+\infty$.

On va écarter le cas 1) en raisonnant par l'absurde. Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, vers un réel que l'on note c . D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n} \quad \text{donc} \quad u_{n+1}^2 = u_n^2 + u_n$$

En passant à la limite dans cette égalité on obtient :

$$c^2 = c^2 + c \quad \text{donc} \quad c = 0$$

D'autre part, $u_0 = 1$ et la suite est croissante. On a donc nécessairement $c \geq 1$, ce qui donne la contradiction suivante : $0 \geq 1$.

Ceci prouve que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas, et donc qu'elle diverge vers $+\infty$

(c) On complète le script comme suit.

```

1 | n=1
2 | u=1
3 | S=1
4 | while S<=1000
5 |     u=sqrt(u^2+u)
6 |     S=S+u
7 |     n=n+1
8 | end
9 | disp(n)

```

Remarque. Comme $S_n \geq u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (S_n) tend vers $+\infty$. Ceci garantit que la boucle `while` s'arrêtera.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n = \frac{(\sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n) \times (\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n)}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} \\ &= \frac{\sqrt{u_n^2 + u_n}^2 - u_n^2}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} \end{aligned}$$

En divisant numérateur et dénominateur par u_n (licite car $u_n > 0$), on obtient :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} + 1}.$$

Enfin, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$. Donc par continuité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$ en $x = 0$, on obtient que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} + 1} \quad \text{existe et vaut} \quad \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

On a bien montré que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}.}$$

Remarque. On pouvait aussi partir de l'écriture $u_{n+1} - u_n = u_n \times \left(\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} - 1 \right)$ et appliquer l'équivalent usuel $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$ à $x = \frac{1}{u_n}$.

(b) La fonction f est dérivable sur $[1; +\infty[$ et pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 = \frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}} = \frac{(2x+1-2\sqrt{x^2+x}) \times (2x+1+2\sqrt{x^2+x})}{2\sqrt{x^2+x}(2x+1+2\sqrt{x^2+x})}.$$

Le dénominateur est positif et le numérateur vaut :

$$\begin{aligned} (2x+1-2\sqrt{x^2+x}) \times (2x+1+2\sqrt{x^2+x}) &= (2x+1)^2 - (2\sqrt{x^2+x})^2 \\ &= 4x^2 + 4x + 1 - 4(x^2+x) = 1 > 0 \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in [1; +\infty[$: $f'(x) > 0$. Ceci prouve que la fonction f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

On va maintenant montrer que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit de montrer que :

$$u_{n+1} - u_n \leq u_{n+2} - u_{n+1}$$

On a :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n = f(u_n)$$

et de même :

$$u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1})$$

Or, on sait que : $u_n \leq u_{n+1}$ par la question 2.(b). Par croissance de la fonction f , on en déduit :

$$f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \quad \text{donc} \quad u_{n+1} - u_n \leq u_{n+2} - u_{n+1}.$$

Ainsi, la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

(c) On applique le raisonnement de la question 1. avec $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ceci est licite car la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien croissante (3.b) et convergente d'après la question 3.(a). On sait d'après 1.(d) que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

où la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est définie par :

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{n} \times (u_n - u_0) = \frac{u_n}{n} - \frac{1}{n}$$

On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) \stackrel{3.(a)}{=} \frac{1}{2}$$

et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\frac{n}{2}} - \underbrace{\frac{2}{n}}_{\text{tend vers 0}} = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\frac{n}{2}} = 1$$

Ceci prouve bien que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$

4. (a) Pour tout $k \geq 0$, on a :

$$u_{k+1} = \sqrt{u_k^2 + u_k} \quad \Rightarrow \quad u_{k+1}^2 - u_k^2 = u_k.$$

Pour tout $n \geq 1$, on a alors par télescopage :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = u_n^2 - u_0^2 = \boxed{u_n^2 - 1}.$$

On cherche maintenant un équivalent de S_n en $+\infty$. On a :

$$\frac{S_n}{\frac{n^2}{4}} = \frac{u_n^2}{\frac{n^2}{4}} - \frac{1}{\frac{n^2}{4}} = \underbrace{\left(\frac{u_n}{\frac{n}{2}}\right)^2}_{\text{tend vers 1}} - \underbrace{\frac{4}{n^2}}_{\text{tend vers 0}} \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\frac{n^2}{4}} = 1.$$

Ainsi, on a $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{4}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc les équivalences suivantes :

$$S_n \leq 1000 \iff u_n^2 - 1 \leq 1000 \iff u_n^2 \leq 1001 \iff u_n \leq \sqrt{1001}$$

en utilisant la stricte croissance de la fonction racine carrée. D'où le programme suivant :

```

1  n=0
2  u=1
3  while u<=sqrt(1001)
4      u=sqrt(u^2+u)
5      n=n+1
6  end
7  disp(n)

```

Remarque. Cet exercice était notamment l'occasion d'étudier la suite récurrence $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour l'étude d'une telle suite, je vous renvoie au

📖 **Complément de cours 0. Méthodes d'étude d'une suite récurrente d'ordre 1.**

Exercice 2

1. (a) On a $Z(\Omega) = \mathbb{R}$. Puisque $Y = e^Z$, on a $Y(\Omega) =]0; +\infty[$, de sorte que pour tout $x \leq 0$:

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = 0$$

Pour tout $x > 0$, on a :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(e^Z \leq x) \stackrel{\text{strict, croiss.}}{=} P(Z \leq \ln x) = \Phi(\ln x)$$

D'où finalement :

$$F_Y(x) = \begin{cases} \Phi(\ln x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(b) La fonction F_Y est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty; 0[$ (fonction constante) et sur $]0; +\infty[$ (par composition de \ln et de Φ). On obtient une densité f_Y de Y en dérivant F_Y en tout point $x \neq 0$:

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \times \Phi'(\ln x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

et on pose par exemple $f_Y(0) = 0$. Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\Phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

On obtient bien :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Remarque. Il était admis dans l'énoncé que Y est à densité. On aurait pu le démontrer ici en montrant que F_Y est continue sur \mathbb{R} (cela posait problème surtout en 0) et \mathcal{C}^1 sauf éventuellement en 0.

2. (a) Les variables aléatoires X_n sont finies, donc leur espérance et leur variance existent. On a :

$$E(X_n) = 1 \times P(X_n = 1) + (-1) \times P(X_n = -1) = p - (1 - p) = \boxed{2p - 1}$$

X_n^2 est une variable certaine de valeur 1, donc $E(X_n^2) = 1$ et par Huygens :

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = 1 - (2p - 1)^2 = 1 - (4p^2 - 4p + 1) = 4p - 4p^2 = \boxed{4p(1 - p)}$$

- (b) T_n est un produit de termes valant chacun soit 1, soit -1 . Donc $\boxed{T_n(\Omega) = \{-1, 1\}}$.

On calcule $E(T_n)$ (qui existe puisque T_n est finie). Par mutuelle indépendance des variables aléatoires X_1, \dots, X_n , on a :

$$E(T_n) = \prod_{k=1}^n E(X_k) = \prod_{k=1}^n (2p - 1) = \boxed{(2p - 1)^n}$$

Mais on a également :

$$E(T_n) = \sum_{x \in T_n(\Omega)} xP(T_n = x) = P(T_n = 1) - P(T_n = -1).$$

On a donc : $\boxed{P(T_n = 1) - P(T_n = -1) = (2p - 1)^n}$.

- (c) D'autre part, $([T_n = 1], [T_n = -1])$ est un SCE, de sorte que :

$$\boxed{P(T_n = 1) + P(T_n = -1) = 1}.$$

Par somme des deux dernières égalités obtenues, on en déduit que :

$$2P(T_n = 1) = 1 + (2p - 1)^n \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(T_n = 1) = \frac{1 + (2p - 1)^n}{2}},$$

$$\text{et : } P(T_n = -1) = 1 - P(T_n = 1) = \boxed{\frac{1 - (2p - 1)^n}{2}}.$$

Autre méthode. Puisque $T_n(\Omega) = \{1, -1\}$, T_n suit une loi de Rademacher. Or, on sait d'après la question 2.(a) que :

$$E(T_n) = 2P(T_n = 1) - 1.$$

On a donc $P(T_n = 1) = \frac{1 + (2p - 1)^n}{2}$, et T_n suit la loi de $\boxed{\text{Rademacher de paramètre } \frac{1 + (2p - 1)^n}{2}}$.

- (d) On a :

$$0 < p < 1 \quad \text{donc} \quad 0 < 2p < 2 \quad \text{donc} \quad -1 < 2p - 1 < 1.$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2p - 1)^n = 0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = 1) = \frac{1}{2}.$$

On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = -1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - P(T_n = 1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

On reconnaît pour loi limite la loi de Rademacher de paramètre $\frac{1}{2}$. Ainsi

$$\boxed{(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge en loi vers une variable aléatoire } T \text{ vérifiant : } P(T = 1) = P(T = -1) = \frac{1}{2}}.$$

3. (a) Soit $\omega \in \Omega$ tel que : $|T_{n+1}(\omega) - T'(\omega)| < \frac{1}{2}$ et $|T_n(\omega) - T'(\omega)| < \frac{1}{2}$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$|T_{n+1}(\omega) - T_n(\omega)| = |T_{n+1}(\omega) - T'(\omega) + T'(\omega) - T_n(\omega)| \leq \underbrace{|T_{n+1}(\omega) - T'(\omega)|}_{<1/2} + \underbrace{|T'(\omega) - T_n(\omega)|}_{<1/2}.$$

On a donc bien :

$$|T_{n+1}(\omega) - T_n(\omega)| < 1$$

Ceci établit l'inclusion :

$$\boxed{\left[|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2} \right] \cap \left[|T_n - T'| < \frac{1}{2} \right] \subset \left[|T_{n+1} - T_n| < 1 \right]}$$

- (b) On passe au complémentaire dans l'inclusion précédente. On obtient :

$$\overline{\left[|T_{n+1} - T_n| < 1 \right]} \subset \overline{\left[|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2} \right] \cap \left[|T_n - T'| < \frac{1}{2} \right]}$$

Autrement dit, avec la règle $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$:

$$\left[|T_{n+1} - T_n| \geq 1 \right] \subset \left[|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2} \right] \cup \left[|T_n - T'| \geq \frac{1}{2} \right]$$

On a donc par croissance de la probabilité :

$$P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) \leq P\left(\left[|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2} \right] \cup \left[|T_n - T'| \geq \frac{1}{2} \right]\right)$$

Enfin, on sait que pour tous événements A et B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et donc : $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$. On obtient bien :

$$\boxed{P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) \leq P\left(|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}\right) + P\left(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}\right)}.$$

- (c) On remarque que :

$$T_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} X_k = T_n \times X_{n+1} \quad \Rightarrow \quad T_{n+1} - T_n = T_n \times (X_{n+1} - 1).$$

On a donc :

$$|T_{n+1} - T_n| = |T_n| \times |X_{n+1} - 1| = |X_{n+1} - 1|$$

car $|T_n|$ est une variable certaine de valeur 1. On a donc :

$$P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) = P(|X_{n+1} - 1| \geq 1) = P(X_{n+1} = -1)$$

car X_{n+1} vaut soit 1, soit -1 . Ainsi, on a donc bien :

$$\boxed{P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) = 1 - p.}$$

- (d) On va montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas en probabilité. On raisonne par l'absurde en supposant que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire T' . On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}\right) = 0$$

Or, d'après les questions 3.(b) et 3.(c), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 - p \leq P\left(|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}\right) + P\left(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}\right).$$

En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient donc :

$$1 - p \leq 0 \quad \text{soit encore} \quad p \geq 1.$$

C'est absurde car d'après l'énoncé, $p < 1$. Ainsi $\boxed{(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas en probabilité.

4. (a) Par définition :

$$\overline{X_n}^* = \frac{\overline{X_n} - E(\overline{X_n})}{\sqrt{V(\overline{X_n})}}$$

On va calculer $E(\overline{X_n})$ et $V(\overline{X_n})$. D'après les formules de la question 2.(a) avec $p = \frac{1}{2}$, on a pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $E(X_k) = 0$ et $V(X_k) = 1$. Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(\overline{X_n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \underbrace{E(X_k)}_0 = 0$$

Par la formule $V(aX) = a^2V(X)$ puis par mutuelle indépendance des variables aléatoires X_1, \dots, X_n , on a :

$$V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2} V(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n^2} \times \sum_{k=1}^n \underbrace{V(X_k)}_1 = \frac{1}{n}.$$

Ainsi, on a : $\boxed{\overline{X_n}^* = \sqrt{n} \times \overline{X_n}}$

(b) Les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes et de même loi, et admettent une espérance et une variance. D'après le théorème central limite, $\overline{X_n}^*$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Autrement dit (en supposant que la variable aléatoire Z de la question 1 est définie sur le même espace probabilisé que les X_n) :

$$\sqrt{n} \times \overline{X_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$$

En composant par la fonction exponentielle, qui est continue sur \mathbb{R} :

$$e^{\sqrt{n} \times \overline{X_n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \underbrace{e^Z}_Y$$

Enfin, on remarque que $U_n^{1/\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n} \times \overline{X_n}}$. On a donc bien :

$$\boxed{U_n^{1/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y}$$

Exercice 3

1. Pour tout $x \in E$, on a par antisymétrie de f :

$$\langle f(x), x \rangle = -\langle x, f(x) \rangle.$$

Or, par symétrie du produit scalaire, on a $\langle x, f(x) \rangle = \langle f(x), x \rangle$, d'où :

$$\langle f(x), x \rangle = -\langle f(x), x \rangle, \quad \text{donc} \quad 2\langle f(x), x \rangle = 0, \quad \text{donc} \quad \boxed{\langle f(x), x \rangle = 0}.$$

2. Par théorème du rang, on sait déjà que :

$$\boxed{\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim E} \quad (1)$$

Montrons que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$. Soit pour cela $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. Il s'agit de montrer que $x = 0_E$. Puisque $x \in \text{Im}(f)$, il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. On a alors :

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle x, f(y) \rangle \stackrel{f \text{ antisym.}}{=} -\langle f(x), y \rangle \stackrel{x \in \text{Ker}(f)}{=} -\langle 0_E, y \rangle = 0.$$

On a donc $\|x\| = 0$, d'où $x = 0_E$. Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}} \quad (2)$$

Les affirmations (1) et (2) suffisent à prouver que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E :

$$\boxed{\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E}.$$

3. Déjà, s est bien un endomorphisme de E en tant que composée de deux endomorphismes de E . Montrons qu'il est symétrique. Soient x et y des vecteurs de E . Il s'agit de prouver que : $\langle s(x), y \rangle = \langle x, s(y) \rangle$. On a :

$$\langle s(x), y \rangle = \langle f(f(x)), y \rangle \stackrel{f \text{ antisym.}}{=} -\langle f(x), f(y) \rangle \stackrel{f \text{ antisym.}}{=} -(-\langle x, f(f(y)) \rangle) = \langle x, s(y) \rangle$$

Ainsi, s est un endomorphisme symétrique de E

Montrons maintenant que ses valeurs propres sont dans \mathbb{R}_- . Soit λ une valeur propre de s et x un vecteur propre associé (donc x n'est pas le vecteur nul). On a d'une part :

$$\langle s(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$$

et d'autre part :

$$\langle s(x), x \rangle = \langle f(f(x)), x \rangle \stackrel{f \text{ antisym.}}{=} -\langle f(x), f(x) \rangle = -\|f(x)\|^2$$

Comme $x \neq 0_E$ on a $\|x\|^2 \neq 0$. On en déduit que :

$$\lambda \|x\|^2 = -\|f(x)\|^2 \quad \text{donc} \quad \lambda = \underbrace{\frac{-1}{\|x\|^2}}_{<0} \times \underbrace{\|f(x)\|^2}_{\geq 0} \quad \text{donc} \quad \lambda \leq 0.$$

Ainsi, les valeurs propres de s sont toutes dans \mathbb{R}_- .

4. (a) g étant la restriction de f à l'espace vectoriel $\text{Im}(f)$, c'est une application linéaire. De plus, pour tout $x \in \text{Im}(f)$, on a $g(x) = f(x) \in \text{Im}(f)$. Ceci prouve que g est un endomorphisme de $\text{Im}(f)$. Enfin, pour tous $x, y \in \text{Im}(f)$, on a :

$$\langle g(x), y \rangle = \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle = -\langle x, g(y) \rangle$$

Ainsi, g est un endomorphisme antisymétrique de $\text{Im}(f)$.

- (b) Soit λ une valeur propre de t et $x \in \text{Im}(f)$ un vecteur propre associé. Avec le même raisonnement qu'à la question 3., on obtient :

$$\lambda = \frac{-1}{\|x\|^2} \times \|g(x)\|^2 = \frac{-1}{\|x\|^2} \times \|f(x)\|^2$$

De plus, on sait que $x \in \text{Im}(f) \setminus \{0_E\}$. Et puisque $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$, on a donc $x \notin \text{Ker}(f)$. Ainsi, on a $f(x) \neq 0_E$, et donc :

$$\lambda = \underbrace{\frac{-1}{\|x\|^2}}_{<0} \times \underbrace{\|f(x)\|^2}_{>0} \quad \text{donc} \quad \lambda < 0.$$

Les valeurs propres de s sont donc toutes dans \mathbb{R}_* .

5. D'après l'énoncé $e_1 \neq 0_E$ et $t(e_1) = \lambda e_1$.

(a) Il s'agit de montrer que :

- 1) e_1 et $g(e_1)$ sont dans $E_\lambda(t)$
- 2) $\langle e_1, g(e_1) \rangle = 0$
- 3) la famille $(e_1, g(e_1))$ est libre.

Allons-y pour 1). Par définition, $e_1 \in E_\lambda(t)$. De plus :

$$t(g(e_1)) = g \circ g(g(e_1)) = g(g(g(e_1))) = g(t(e_1)) = g(\lambda e_1) = \lambda g(e_1)$$

On a donc bien $g(e_1) \in E_\lambda(t)$. Montrons maintenant 2). On a :

$$\langle e_1, g(e_1) \rangle = \langle e_1, f(e_1) \rangle \stackrel{\text{par 1.}}{=} 0.$$

La famille $(e_1, g(e_1))$ est donc orthogonale. Pour montrer 3), il suffit de prouver qu'elle ne contient pas le vecteur nul. D'après l'énoncé e_1 n'est pas le vecteur nul (c'est un vecteur propre). De plus $e_1 \in \text{Im}(f) \setminus \{0_E\}$ et $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$. On a donc $g(e_1) = f(e_1) \neq 0_E$.

Ainsi $\boxed{(e_1, g(e_1))}$ est une famille orthogonale et libre de $E_\lambda(t)$

- (b) On va maintenant construire une base orthogonale de $E_\lambda(t)$ et montrer que cet espace vectoriel est de dimension paire. On a vu que $(e_1, g(e_1))$ est une famille orthogonale libre de $E_\lambda(t)$. On distingue alors deux cas :

Cas 1 : si $\text{Vect}(e_1, g(e_1)) = E_\lambda(t)$. Dans ce cas, $(e_1, g(e_1))$ est une base orthogonale de $E_\lambda(t)$.

Cas 2 : sinon. On note F_2 le supplémentaire orthogonal de $\text{Vect}(e_1, g(e_1))$ dans $E_\lambda(t)$. F_2 n'est pas réduit à $\{0_E\}$ donc il existe un vecteur non-nul $e_2 \in F_2$. Montrons alors que

$$(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2)) \text{ est une famille orthogonale libre de } E_\lambda(t)$$

On peut appliquer mutatis mutandis le raisonnement de la question 5.(a), à l'exception de l'orthogonalité qui mérite un examen minutieux. On a déjà montré que $\langle e_1, g(e_1) \rangle = 0$. De manière analogue, on a $\langle e_2, g(e_2) \rangle = 0$. Comme e_2 est dans l'orthogonal de $\text{Vect}(e_1, g(e_1))$, on obtient aussi :

$$\langle e_2, e_1 \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle e_2, g(e_1) \rangle = 0$$

Il reste à prouver que $\langle g(e_2), e_1 \rangle = 0$ et $\langle g(e_2), g(e_1) \rangle = 0$. Comme g est antisymétrique par 4.(a), on a :

$$\langle g(e_2), e_1 \rangle = - \underbrace{\langle e_2, g(e_1) \rangle}_0 = 0.$$

Enfin, on a :

$$\langle g(e_2), g(e_1) \rangle = - \langle e_2, g(g(e_1)) \rangle = - \langle e_2, t(e_1) \rangle = - \langle e_2, \lambda e_1 \rangle = -\lambda \underbrace{\langle e_2, e_1 \rangle}_0 = 0.$$

Ainsi, $\boxed{(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2))}$ est une famille orthogonale de $E_\lambda(t)$.

De plus elle est libre car les vecteurs sont non-nuls (comme en 5.(a)). On distingue alors de nouveau deux sous-cas :

Cas 2.1 : si $\text{Vect}(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2)) = E_\lambda(t)$. Dans ce cas, $(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2))$ est une base orthogonale de $E_\lambda(t)$.

Cas 2.2 : sinon. On note F_3 le supplémentaire orthogonal de $\text{Vect}(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2))$ dans $E_\lambda(t)$. F_3 contient un vecteur non-nul e_3 . De même que précédemment, on montre que

$$(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2), e_3, g(e_3)) \text{ est une famille orthogonale de } E_\lambda(t)$$

et ainsi de suite ...

Init. Pour $q = 0$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a bien :

$$I(p, 0) = \underbrace{\frac{p!0!}{(p+0)!}}_{=1} \times I(p+0, 0).$$

Hér. Soit $q \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$. Montrons que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$I(p, q+1) = \frac{p!(q+1)!}{(p+q+1)!} I(p+q+1, 0).$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. On applique la relation de la question 2 au couple $(p, q+1)$ qui est bien dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. On obtient :

$$I(p, q+1) = \frac{q+1}{p+1} I(p+1, q).$$

Par hypothèse de récurrence on a :

$$I(p+1, q) = \frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!} I(p+1+q, 0)$$

Enfin, $\frac{(p+1)!}{p+1} = p!$ et $(q+1) \cdot q! = (q+1)!$. On obtient donc :

$$I(p, q+1) = \frac{q+1}{p+1} \times \frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!} I(p+1+q, 0) = \frac{p!(q+1)!}{(p+q+1)!} I(p+q+1, 0).$$

Par principe de récurrence, la propriété H_q est donc vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$.

4. En utilisant les questions 3 et 1, on obtient pour tout $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} \times I(p+q, 0) \stackrel{\text{par 1}}{=} \frac{p!q!}{(p+q)!} \times \frac{1}{p+q+1} = \boxed{\frac{p!q!}{(p+q+1)!}}$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I(n, n) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

5. Montrons que b_n est une densité de probabilité.

- La fonction b_n est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $]1; +\infty[$ (fonction nulle) et aussi sur $]0; 1[$ (polynôme). Donc b_n est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in [0; 1]$, on a $x \geq 0$ et $(1-x) \geq 0$, et donc :

$$b_n(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n (1-x)^n \geq 0.$$

Sinon, $b_n(x) = 0$. Dans tous les cas on a : $b_n(x) \geq 0$

- On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x) dx = \int_0^1 \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n (1-x)^n dx$$

Cette intégrale converge (intégrale d'une fonction continue sur un segment) et par linéarité de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x) dx = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \underbrace{\int_0^1 x^n (1-x)^n dx}_{\text{on reconnaît } I(n,n)} = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \boxed{= 1.}$$

Ainsi b_n est une densité de probabilité.

Remarque Pour $n \geq 1$ on pourrait montrer la continuité de b_n en 0 et en 1 mais ça n'a pas d'importance ici étant donné la caractérisation d'une densité de probabilité.

6. X_0 admet la densité f_0 définie par :

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, X_0 suit la loi uniforme sur $[0; 1]$

7. (a) $E(X_n)$ existe si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x b_n(x) dx = \int_0^1 \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{n+1} (1-x)^n dx$ converge absolument, donc converge car la fonction intégrée est positive. Et c'est bien le cas car c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Donc X_n admet une espérance, et on a :

$$E(X_n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \underbrace{\int_0^1 x^{n+1} (1-x)^n dx}_{\text{on reconnaît } I(n+1, n)} = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+1)!n!}{(2n+2)!} = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

On a bien $E(X_n) = \frac{1}{2}$.

(b) Par théorème de transfert, $E(X_n^2)$ existe si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 b_n(x) dx$ converge. De même que pour $E(X_n)$, cette intégrale converge et on a :

$$E(X_n^2) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} I(n+2, n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+2)!n!}{(2n+3)!} = \frac{(n+2)(n+1)}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{n+2}{2(2n+3)}$$

X_n admet donc une variance et par formule de Koenig-Huygens :

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac{1}{4} = \frac{2(n+2) - (2n+3)}{4(2n+3)} = \frac{1}{4(2n+3)}$$

(c) Puisque $E(X_n) = \frac{1}{2}$ est indépendante de n et que $V(X_n) \rightarrow 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev va nous permettre de montrer la convergence en probabilité de (X_n) vers $\frac{1}{2}$. Soit pour cela $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq P(|X_n - E(X_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2},$$

autrement dit :

$$0 \leq P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4\varepsilon^2(2n+3)} \quad \text{tend vers 0 quand } n \rightarrow +\infty$$

Par théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right)$ existe et vaut 0.

Ainsi, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine de valeur $\frac{1}{2}$.

Partie 3 : simulation informatique de X_n

8. On a :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

9. (a) V_{2n+1} désigne le temps d'arrivée de la dernière personne, d'où : $V_{2n+1} = \max(U_1, \dots, U_{2n+1})$
 (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$G_{2n+1}(x) = P(V_{2n+1} \leq x) = P(\max(U_1, \dots, U_{2n+1}) \leq x) = P(U_1 \leq x, U_2 \leq x, \dots, U_{2n+1} \leq x).$$

Par mutuelle indépendance des variables aléatoires U_1, \dots, U_{2n+1} on a donc :

$$G_{2n+1}(x) = \underbrace{P(U_1 \leq x)}_{=F_U(x)} \times \underbrace{P(U_2 \leq x)}_{=F_U(x)} \times \dots \times \underbrace{P(U_{2n+1} \leq x)}_{=F_U(x)} = (F_U(x))^{2n+1}$$

Ainsi, on a :

$$G_{2n+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x^{2n+1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

10. (a) V_1 désigne le temps d'arrivée de la première personne, d'où : $V_1 = \min(U_1, \dots, U_{2n+1})$.
 (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$P(V_1 > x) = P(\min(U_1, \dots, U_{2n+1}) > x) = P(U_1 > x, U_2 > x, \dots, U_{2n+1} > x)$$

Par mutuelle indépendance des variables aléatoires U_1, \dots, U_{2n+1} , on a donc :

$$P(V_1 > x) = \underbrace{P(U_1 > x)}_{=1-F_U(x)} \times \underbrace{P(U_2 > x)}_{=1-F_U(x)} \times \dots \times \underbrace{P(U_{2n+1} > x)}_{=1-F_U(x)} = (1 - F_U(x))^{2n+1}.$$

Ainsi, on a :

$$G_1(x) = P(V_1 \leq x) = 1 - P(V_1 > x) = 1 - (1 - F_U(x))^{2n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1 - x)^{2n+1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

11. On propose le programme suivant :

```

1 | n = input('Entrez la valeur de n : ')
2 | U = grand(1,2*n+1,'unf',0,1) // alternative : U = rand(1,2*n+1)
3 | Vpremier = min(U) // V1
4 | Vdernier = max(U) //V2n+1

```

12. (a) Pour tout $x \in [0; 1]$ on a :

$$G_{n+1}(x) = P(V_{n+1} \leq x).$$

L'événement $[V_{n+1} \leq x]$ est réalisé si et seulement si, au moins $n+1$ personnes sont arrivées avant le temps x . Pour tout $k \in \llbracket n+1; 2n+1 \rrbracket$, on note R_k l'événement : « exactement k personnes sont arrivées avant le temps x ». On a donc :

$$[V_{n+1} \leq x] = R_{n+1} \sqcup R_{n+2} \sqcup \dots \sqcup R_{2n+1}$$

où \sqcup désigne une union disjointe. Par incompatibilité, on a :

$$G_{n+1}(x) = P(R_{n+1} \sqcup R_{n+2} \sqcup \cdots \sqcup R_{2n+1}) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} P(R_k) \quad (1)$$

Soit $k \in \llbracket n+1; 2n+1 \rrbracket$. On va montrer que :

$$P(R_k) = \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k}$$

On note \mathcal{P}_k l'ensemble des parties de $\llbracket 1; 2n+1 \rrbracket$ ayant exactement k éléments, chaque partie $J \in \mathcal{P}_k$ correspondant au choix des k personnes arrivant avant le temps x . On a :

$$R_k = \bigsqcup_{J \in \mathcal{P}_k} \left(\left(\bigcap_{i \in J} [U_i \leq x] \right) \cap \left(\bigcap_{i \in \llbracket 1; 2n+1 \rrbracket \setminus J} [U_i > x] \right) \right),$$

où l'union est ici aussi disjointe. On a donc, par incompatibilité et mutuelle indépendance des variables aléatoires U_1, \dots, U_{2n+1} :

$$P(R_k) = \sum_{J \in \mathcal{P}_k} \underbrace{\prod_{i \in J} P(U_i \leq x)}_{x^k} \times \underbrace{\prod_{i \in \llbracket 1; 2n+1 \rrbracket \setminus J} P(U_i > x)}_{(1-x)^{2n+1-k}} = \sum_{J \in \mathcal{P}_k} x^k (1-x)^{2n+1-k}$$

Enfin, on sait que l'ensemble \mathcal{P}_k est de cardinal $\binom{2n+1}{k}$. On a donc bien :

$$P(R_k) = \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k} \quad (2)$$

Les égalités (1) et (2) donnent le résultat souhaité :

$$G_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k}.$$

- (b) Comme $V_{n+1}(\Omega) = [0; 1]$, on a $G_{n+1}(x) = 0$ pour tout $x < 0$ et $G_{n+1}(x) = 1$ pour tout $x > 1$. G_{n+1} est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0 et en 1. On trouve une densité g_{n+1} de V_{n+1} en dérivant G_{n+1} en tout point $x \neq 0, 1$. Donc si $x < 0$ ou $x > 1$, $g_{n+1}(x) = 0$. Et si $x \in]0; 1[$, par linéarité de la dérivation :

$$g_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(kx^{k-1}(1-x)^{2n+1-k} - (2n+1-k)x^k(1-x)^{2n-k} \right),$$

soit encore :

$$g_{n+1}(x) = \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} kx^{k-1}(1-x)^{2n+1-k}}_{\text{on note } S_1 \text{ cette somme}} - \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (2n+1-k)x^k(1-x)^{2n-k}}_{\text{on note } S_2 \text{ cette somme}}$$

On ré-écrit la somme S_1 :

$$S_1 = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} kx^{k-1}(1-x)^{2n+1-k} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{(k-1)!(2n+1-k)!} x^{k-1}(1-x)^{2n+1-k}$$

On ré-écrit maintenant la somme S_2 . Comme le terme $(2n+1-k)$ vaut 0 pour $k = 2n+1$, on a :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n+1}{k} (2n+1-k)x^k(1-x)^{2n-k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} (2n+1-k)x^k(1-x)^{2n-k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n+1)!}{k!(2n-k)!} x^k(1-x)^{2n-k} \end{aligned}$$

On fait un changement d'indice $i = k + 1$. On obtient :

$$S_2 = \sum_{i=n+2}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{(i-1)!(2n+1-i)!} x^{i-1}(1-x)^{2n+1-i}$$

On a donc :

$$g_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{(k-1)!(2n+1-k)!} x^{k-1}(1-x)^{2n+1-k} - \sum_{i=n+2}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{(i-1)!(2n+1-i)!} x^{i-1}(1-x)^{2n+1-i}$$

Il ne reste que le terme $k = n + 1$ de la première somme :

$$g_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)!}{n!n!} x^n(1-x)^n$$

Enfin on pose $g_{n+1}(0) = g_{n+1}(1) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} 0^n$. On a obtenu la densité suivante de V_{n+1} :

$$g_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n(1-x)^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On reconnaît la fonction b_n , densité de X_n . Ainsi, les variables X_n et V_{n+1} ont la même loi.

(c) Le programme renvoie la valeur médiane du tableau U c'est-à-dire 8. En effet, on a :

$$1 \leq 2 \leq 5 \leq 8 \leq 9 \leq 13 \leq 23$$

(d) D'après la question 12.(b), il suffit de simuler la variable aléatoire V_{n+1} , c'est-à-dire la valeur médiane de U_1, \dots, U_{2n+1} . D'où le programme suivant :

```

1 | n = input('Entrez la valeur de n : ')
2 | U = grand(1,2*n+1,'unf',0,1)
3 | X = median(U) // simulation de Xn

```