DM11

Devoir maison à rendre le 06/01/2020

Exercice 1

On définit sur l'intervalle $]0,1]$ les deux fonctions $f : x \mapsto x\ln(x)$ et $g : x \mapsto x^x = e^{x\ln(x)}$.

1. (a) Les fonctions f et g admettent-t-elles des limites en 0 ?
   (b) Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g sur $]0,1]$.
   (c) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ est convergente. On notera I sa valeur.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (t\ln(t))^n \mathrm{d}t,$$
   et :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   (c) Calculer u_0 et u_1.
   (d) À l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$
   (e) Montrer que la série de terme général u_n converge.
   (f) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function S = somme(n)` qui prend comme paramètre d'entrée un entier naturel n et qui produit en paramètre de sortie la valeur de S_n.

3. (a) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre n appliquée à la fonction exponentielle, montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ et tout entier naturel n :
$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$
   (b) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |I - S_n| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$
   (c) Montrer que :
$$I = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.$$
   (d) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function I = estimation(eps)` qui prend comme paramètre d'entrée un réel strictement positif ε et qui produit en paramètre de sortie une valeur approchée de I à ε près.

Exercice 2

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On note tr l'application linéaire qui à toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$.
   (b) En déduire la dimension de $\ker(\mathrm{tr})$.
   (c) Établir que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\mathrm{tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I)$.
2. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe $f(M) = M + \mathrm{tr}(M)I$
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Utiliser la première question pour déterminer les valeurs propres de f. En déduire que f est un automorphisme diagonalisable de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe $g(M) = M+\mathrm{tr}(M)J$, où J désigne une matrice non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.

   On admet que g est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Établir que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.
   (b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.
   (c) g est-il diagonalisable ?

Exercice 3

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n et Z_n les deux variables aléatoires définies respectivement par :

$$Y_n = \max(X_1, \dots, X_n) \qquad \text{et} \qquad Z_n = \frac{X_1}{1} + \frac{X_2}{2} + \dots + \frac{X_n}{n}.$$

Pour finir, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ n\exp(-t)(1-\exp(-t))^{n-1} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}.$$

1. (a) Pour tout réel t, exprimer le réel $F_{Y_n}(t)$ à l'aide des réels $F_{X_1}(t), \dots, F_{X_n}(t)$.
   (b) Pour tout réel t, donner alors l'expression de $F_{Y_n}(t)$ en fonction de n et de t et distinguant le cas $t < 0$ et le cas $t \geq 0$.
   (c) Vérifier alors que la fonction f_n est une densité de probabilité de la variable aléatoire Y_n.
2. (a) Préciser la fonction de répartition de la variable aléatoire $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.
   (b) Démontrer que $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est une variable aléatoire à densité et proposer une densité d_{n+1}.
3. Pour tout réel x, vérifier que : $\displaystyle\int_0^x n\exp(nt)(1-\exp(-t))^{n-1}\mathrm{dt} = (\exp(x)-1)^n$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, Z_n est une variable aléatoire à densité dont f_n est une densité.

   Indication. Pour l'hérédité, on remarquera que $Z_{n+1} = Z_n + \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.
5. Sans calcul d'intégrale, montrer que Y_n admet une espérance, et calculer $E(Y_n)$.

Problème

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On dispose de deux urnes U et V, l'urne U contenant une boule blanche et $(n-1)$ boules noires et l'urne V contenant une boule noire et $(n-1)$ boules blanches.

Un joueur choisit une urne au hasard pour le premier tirage puis il effectue des tirages d'une boule avec remise de cette boule dans l'urne dont elle provient, selon trois protocoles étudiés dans les trois parties de ce problème.

Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on note B_i l'événement « on obtient une boule blanche au i^{eme} tirage ».

On note X le numéro du tirage où l'on obtient, pour la première fois, une boule noire et Y le numéro du tirage où l'on obtient, pour la première fois, une boule blanche. On admet que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Pour finir, on note U l'événement « le premier tirage a lieu dans l'urne U ».

Partie 1

Dans cette partie, les tirages qui suivent le premier tirage ont lieu dans l'urne qui a été choisie au premier tirage.

1. (a) Déterminer $P(X=1)$.

   (b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, écrire l'événement $(X=k)$ à l'aide de certains des événements B_i ou $\bar{B}_i$, puis montrer que :

$$\forall k \geq 2,\ P(X=k) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right)$$

   Vérifier que cette formule reste valable pour $k=1$.

2. Établir que X possède une espérance et donner sa valeur.

3. Montrer que X et Y suivent la même loi.

4. On décide de coder l'événement U par 1 et l'événement $\bar{U}$ par 0.

   Recopier et compléter (en remplaçant les parties étoilées) le programme `Scilab` suivant pour qu'il calcule et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience décrite dans cette partie.

```
function y=cb(n)
    hasard = grand(1,1,'uin',1,2)
    y=1;
    if hasard == 1 then
        while grand(1,1,'uin',1,n)>1
            y=y+1;
        end
    else
        while ****************
            ****************
        end
    end
endfunction
```

Partie 2

Dans cette partie, les tirages qui suivent le premier tirage ont lieu dans l'urne U si le tirage précédent a donné une boule blanche et dans l'urne V sinon.

1. (a) Donner $P(X = 1)$.
   (b) En procédant comme dans la partie 1, montrer que :
   $$\forall k \geq 2,\ P(X = k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} \frac{n-1}{n}$$
2. Établir que X possède une espérance et donner sa valeur.
3. Montrer que X et Y suivent la même loi.
4. Avec les mêmes conventions et les mêmes notations que celles de la partie 1, écrire un programme permettant le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience décrite dans cette partie.

Partie 3

Dans cette partie, chacun des tirages suivant le premier tirage a lieu dans la même urne que le tirage qui le précède si ce dernier a donné une boule blanche et dans l'autre urne dans le cas contraire.

1. (a) Donner $P(X = 1)$.
   (b) Toujours selon la même méthode, montrer que :
   $$\forall k \geq 2,\ P(X = k) = \frac{(n-1)^{k-1} + n - 1}{2n^k}$$
   Vérifier que la formule précédente reste valable pour $k = 1$.
   (c) Établir que X possède une espérance puis montrer que $E(X) = \dfrac{n^2}{2(n-1)}$.
2. (a) En procédant comme à la question 1b, montrer que :
   $$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = 2i) = \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1} \frac{n^2 - 2n + 2}{2n^2}$$
   (b) Montrer également que :
   $$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = 2i+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i}$$
   Vérifier que cette formule reste valable pour $i = 0$.
   (c) On pose $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ E_{2m}(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2m} kP(Y = k)$ et $\forall m \in \mathbb{N},\ E_{2m+1}(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2m+1} kP(Y = k)$.
      i. Montrer que la suite $(E_{2m}(Y))_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.
      ii. Montrer que la suite $(E_{2m+1}(Y))_{m\in\mathbb{N}}$ converge et a la même limite que $(E_{2m}(Y))_{m\in\mathbb{N}^*}$.
      iii. En déduire que Y possède une espérance et que $E(Y) = \dfrac{3n^2}{2(n^2 - n + 1)}$.
3. (a) Montrer que X et Y suivent la même loi lorsque $n = 2$. Quelle est cette loi ?
   (b) Comment pouvait-on justifier, sans calcul, les deux résultats ci-dessus ?
4. Montrer que $E(Y) \leq E(X)$ avec égalité si et seulement si $n = 2$.
5. Écrire un programme permettant le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience décrite dans cette partie.