DM12

Correction du devoir maison

Exercice 1 (Ecricome 2013)

1. On a ${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tAA \boxed{= B}$. Donc B est symétrique.

   Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle BX, X\rangle = {}^t(BX)X = {}^tX\,{}^tBX = {}^tX\,{}^tAAX = {}^t(AX)AX \boxed{= \|AX\|^2.}$$

2. Puisque B est symétrique réelle, on sait par le cours que toutes ses valeurs propres sont réelles. Montrons qu'elles sont également toutes positives. Soient λ une valeur propre de B et X un vecteur propre associé, de sorte que X **est non nul** et $BX = \lambda X$. On a :

$$\langle BX, X\rangle = \langle \lambda X, X\rangle = \lambda\|X\|^2.$$

   D'autre part, on a par 1. :

$$\langle BX, X\rangle = \|AX\|^2.$$

   En divisant par $\|X\|^2$ qui est **non nul**, on obtient bien que $\lambda = \dfrac{\|AX\|^2}{\|X\|^2}$ est positive.

   Ainsi $\boxed{\text{toutes les valeurs propres de } B \text{ sont réelles et positives.}}$

3. Une conséquence de $A^k = {}^tA$ est que A et sa transposée commutent. En effet :

$${}^tAA = A^k \times A = A \times A^k = A\,{}^tA.$$

   On en déduit alors :

$$B^k = ({}^tAA)^k = \underbrace{{}^tAA \times {}^tAA \times \cdots \times {}^tAA}_{k \text{ fois}} = ({}^tA)^k A^k = {}^t(A^k)\,{}^tA == {}^t({}^tA)\,{}^tA = A\,{}^tA = {}^tAA \boxed{= B.}$$

   D'où le résultat voulu.

   Par le calcul précédent, on obtient que $P = X^k - X = X(X^{k-1} - 1)$ est polynôme annulateur de B. Les valeurs propres **possibles** de B sont parmi les racines de P, c'est-à-dire 0 est les racines $(k-1)$-èmes de l'unité. Mais comme de plus on a vu qu'elles sont réelles et positives, on en déduit que $\boxed{\text{les valeurs propres possibles de } B \text{ sont } 0 \text{ et } 1.}$

4. B étant symétrique réelle, elle est diagonalisable (en base orthonormée). Il existe donc une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ (qu'on peut même prendre orthogonale) telle que :

$$D = P^{-1}BP$$

   où $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est diagonale avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de B sur sa diagonale. Or on a vu que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\lambda_i = 0$ ou 1. Donc $\lambda_i^2 = \lambda_i$ et on a :

$$D^2 = \text{diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2) = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = D.$$

   Ainsi on obtient :

$$B^2 = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} \boxed{= B.}$$

5. Montrons que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(B)$.

   $\subset$ Soit $X \in \text{Ker}(A)$. On a :

$$AX = 0 \Rightarrow {}^tAAX = 0 \Rightarrow BX = 0.$$

   Ainsi $X \in \text{Ker}(B)$.

   $\supset$ Soit $X \in \text{Ker}(B)$. On a $BX = 0_{n,1}$. D'où en multipliant à gauche par ${}^tX$:

$$0 = {}^tXBX = {}^tX\,{}^tAAX = {}^t(AX)(AX) = \|AX\|^2.$$

   Ainsi on a $\|AX\|^2 = 0$, soit $AX = 0_{n,1}$ et $X \in Ker(A)$.

Ainsi on a bien $\boxed{\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(A).}$

Montrons à présent que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$.

- L'égalité des noyaux et la formule du rang fournissent :

$$\dim \mathrm{Im}(B) = n - \dim \mathrm{Ker}(B) = n - \dim \mathrm{Ker}(A) = \dim \mathrm{Im}(A) \qquad (*)$$

- Pour montrer que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$, il nous suffit de montrer une inclusion. Montrons que $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Im}(A)$: soit $X \in \mathrm{Im}(B)$. Il existe $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X = BY$. Alors on a :

$$X = BY = {}^tAAY = A^kAY = A(A^kY)$$

  Ainsi on a bien $X \in \mathrm{Im}(A)$. $(**)$

On a donc avec $(*)$ et $(**)$ que $\boxed{\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(A).}$

6. Soit $X \in \mathrm{Im}(A) \overset{5.}{=} \mathrm{Im}(B)$. Il existe donc $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X = BX_0$. Multiplions à gauche par B :

$$BX = B^2X_0 \overset{4.}{=} BX_0 = X. \qquad (***)$$

On obtient alors :

$$\|AX\|^2 = {}^tX\,{}^tAAX = {}^tXBX = {}^tXX = \|X\|^2.$$

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } X \in \mathrm{Im}(A), \text{ on a bien } \|AX\| = \|X\|.}$

Remarque. Notons p l'endomorphisme canoniquement associé à B, c'est-à-dire :

$$p : X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to BX \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Comme $B^2 = B$, on en déduit que p un projecteur. En particulier, pour tout $X \in \mathrm{Im}(B) = E_1(B)$, on a $BX = X$. On l'a redémontré ici lors du calcul $(***)$.

On peut même ajouter que le projecteur p est orthogonal puisque sa matrice B dans la base canonique (qui est orthonormale pour le produit scalaire canonique) est symétrique.

Exercice 2 (Edhec 2017)

1. (a) Notons tout d'abord que $M_n(\Omega) = [0,1]$, de sorte que $F_{M_n}(x) = 0$ pour tout $x < 0$ et $F_{M_n}(x) = 1$ pour tout $x > 1$. Soit à présent $x \in [0,1]$. On a :

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \ \dots, \ X_n \leq x) \underset{X_i \text{ indép.}}{=} P(X_1 \leq x) \dots P(X_n \leq x)$$
$$\underset{\text{même loi}}{=} P(X_1 \leq x)^n \underset{x \in [0,1]}{=} x^n$$

On obtient donc que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.}$$

La fonction F_{M_n} est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues, sauf éventuellement en 0 et en 1. On a :

$$\lim_{x \to 0^-} F_{M_n}(x) = F_{M_n}(0) = \lim_{x \to 0^+} F_{M_n}(x).$$

Donc F_{M_n} est continue en 0. On montre de même qu'elle est continue en 1. Donc F_{M_n} est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est également $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1, comme composée de fonctions continues. On peut donc conclure que $\boxed{M_n \text{ est une variable à densité.}}$

(b) On obtient une densité f_{M_n} de M_n en dérivant F_{M_n} là où elle est dérivable. On obtient (en prenant arbitrairement $f_{M_n}(0) = f_{M_n}(1) = 0$) :

$$\boxed{f_{M_n} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ nx^{n-1} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.}$$

(c) Soit $k = 1, 2$. $E(M_n^k)$ existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f_{M_n}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 nt^{n+k-1}\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge car la fonction intégrée est positive. C'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment qui converge donc bien. Ainsi $\boxed{E(M_n^k) \text{ existe bien}}$ et on a :

$$E(M_n^k) = \int_0^1 nt^{n+k-1}\mathrm{d}t = \left[\frac{n}{n+k}t^{n+k}\right]_0^1 = \frac{n}{n+k}.$$

En particulier, on a pour $k = 1$ que $\boxed{E(M_n) = \dfrac{n}{n+1}}$ et pour $k = 2$ que $\boxed{E(M_n^2) = \dfrac{n}{n+2}}$.

(d) Soit $\varepsilon > 0$. La variable aléatoire $(M_n - 1)^2 = M_n^2 - 2M_n + 1$ est positive et admet une espérance car M_n admet un moment d'ordre 2, et on a par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} E((M_n - 1)^2) &= E(M_n^2) - 2E(M_n) + 1 = \frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1 \\ &= \frac{n(n+1) - 2n(n+2) + (n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + n - 2n^2 - 4n + n^2 + 3n + 2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Markov, on obtient donc :

$$\boxed{P\left((M_n - 1)^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{E((M_n - 1)^2)}{\varepsilon^2} = \frac{2}{\varepsilon^2(n+1)(n+2)}}$$

(e) On a $0 \leq P(|M_n - 1| \geq \varepsilon) = P\left((M_n - 1)^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \dfrac{2}{\varepsilon^2(n+1)(n+2)}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\varepsilon^2(n+1)(n+2)} = 0$.
Par le théorème des gendarmes, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(|M_n - 1| \geq \varepsilon) \text{ existe et vaut } 0.}$

Remarque. Il ne nous était pas demandé d'interpréter ce résultat, mais nous obtenons ici que M_n converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine $M = 1$.

2. (a) La variable `X` contient n réalisations d'une variable suivant une loi $\mathscr{U}([0, 1])$. En utilisant la fonction `max`, on obtient une réalisation de la variable M_n, et donc de $Y_n = n(1 - M_n)$.

```
function Y = f(n)
        X = grand(1,n,'unf',0,1)
        Y = n*(1-max(X))
endfunction
```

(b) On remarque que les histogrammes sont semblables, ce qui indique que la distribution des 10000 réalisations de la loi $\mathscr{E}(1)$ sur l'intervalle $[0, 10]$ (représentée par l'histogramme 1) est très proche de celle de 10000 réalisations de Y_{1000} (histogramme de droite). Cela suggère que la loi de Y_{1000} est proche de la loi $\mathscr{E}(1)$. On peut donc conjecturer que la suite de variables (Y_n) converge en loi vers une variable de loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$.

3. (a) On a $M_n(\Omega) = [0, 1]$, donc $Y_n(\Omega) = [0, n]$ de sorte que $F_{Y_n}(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_{Y_n}(x) = 1$ si $x > n$. Pour tout $x \in [0, n]$, on a :

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= P(Y_n \leq x) = P(n(1 - M_n) \leq x) = P\left(1 - M_n \leq \frac{x}{n}\right) = P\left(1 - \frac{x}{n} \leq M_n\right) \\ &= 1 - P\left((M_n < 1 - \frac{x}{n}\right) = 1 - P\left(M_n \leq 1 - \frac{x}{n}\right) \quad \text{car } M_n \text{ continue} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{car } 1 - \frac{x}{n} \in [0, 1] \end{aligned}$$

On obtient donc que :

$$\boxed{F_{Y_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}.}$$

(b) Soit $x \geq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq x$, on a :

$$F_{Y_n}(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = 1 - \exp(n \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right)).$$

On a :

$$n \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} n \left(-\frac{x}{n}\right) = -x \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -x.$$

Par composition de cette limite par la fonction exponentielle qui est continue sur $\mathbb{R}$, on obtient que :

$$\lim_{n \to +\infty} 1 - \exp(n \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right)) = 1 - e^{-x}.$$

Mise en garde.

Attention ici, on compose les limites par l'exponentielle, et pas les équivalents ! Rappelons qu'on ne peut pas composer des équivalents par une fonction exponentielle, logarithme, ...

On a ainsi obtenu que :

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad \lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x) = 1 - e^{-x}.}$$

(c) Pour tout $x < 0$, on a :

$$F_{Y_n}(x) = 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On obtient donc avec le résultat de la question précédente que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} = F_Y(x)$$

où Y est une variable aléatoire suivant une loi $\mathscr{E}(1)$. Cela valide donc la conjecture émise en 2.(b), à savoir que $\boxed{(Y_n) \text{ converge en loi vers une variable } Y \text{ de loi exponentielle } \mathscr{E}(1)}$.