DM12

Devoir maison à rendre le 05/02/2020

Exercice 1

On note :

- $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes (à n lignes) à coefficients réels ;
- $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels ;
- ${}^tU$ la transposée de U ;
- $\mathrm{Ker}(M) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } MX = 0\}$ et $\mathrm{Im}(M) = \{MX,\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$ où M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$ et on note $\|\cdot\|$ sa norme associée. On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier naturel k non nul tels que $A^k = {}^tA$. On pose alors $B = {}^tAA \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer ${}^tB$ et établir que : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle BX, X\rangle = \|AX\|^2$.
2. Démontrer que toutes les valeurs propres de B sont réelles et positives.
3. Prouver que $B^k = B$. Quelles sont les valeurs propres possibles de B ?
4. Justifier que : $B^2 = B$.
5. Montrer que : $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(A)$ puis que : $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(A)$.
6. Établir que : $\forall X \in \mathrm{Im}(A)$, $\|AX\| = \|X\|$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère n variables aléatoires, notées $X_1, X_2, \ldots, X_n$, définie sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant toutes la même loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. On note M_n la variable aléatoire définie par $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, c'est-à-dire que pour tout ω dans Ω, on a $M_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$. On admet que M_n est une variable aléatoire et on note F_{M_n} sa fonction de répartition.
   (a) Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F_{M_n}(x)$, puis montrer que M_n est une variable à densité.
   (b) En déduire une densité f_{M_n} de M_n.
   (c) Établir l'existence et donner la valeur de $E(M_n)$ et $E(M_n^2)$.
   (d) Donner, pour tout $\varepsilon > 0$, un majorant ne dépendant que de n et de ε de la probabilité $P\left((M_n - 1)^2 \geq \varepsilon^2\right)$.
   (e) Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(|M_n - 1| \geq \varepsilon\right) = 0$.
2. On pose $Y_n = n\,(1 - M_n)$
   (a) On rappelle que `grand(1,n,'unf',0,1)` simule n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$.

   Compléter la déclaration de fonction `Scilab` suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Y_n.

```
function Y = f(n)
        X = grand(1,n,'unf',0,1)
        Y = ------
```

(b) Voici deux scripts (celui de droite utilise la fonction `f` définie ci-dessus) :

```
e = grand(1,10000,'exp',1)
s = linspace(0,10,11)
histplot(s,e)
```

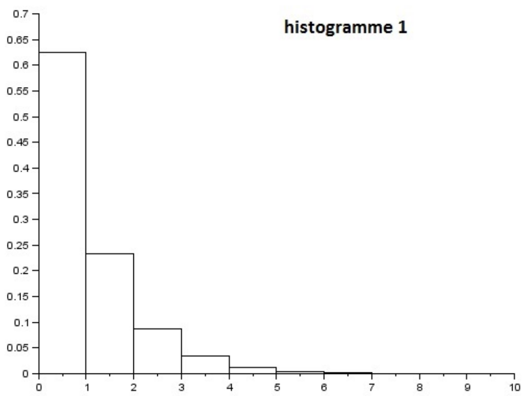
Script (1)

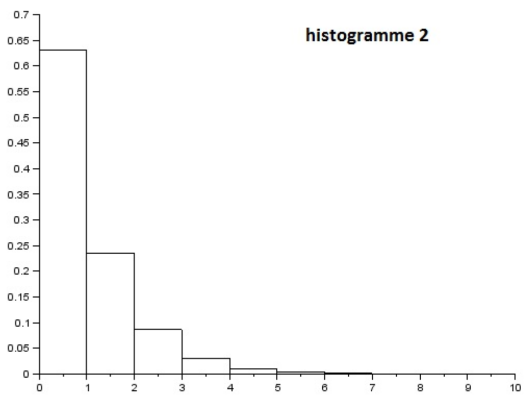
```
n = input('entrez la valeur de n :')
Y = []
for k = 1:10000
        Y = [Y,f(n)]
end
s = linspace(0,10,11)
histplot(s,Y)
```

Script (2)

Chacun de ces scripts simule 10000 variables indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0,1]$, $]1,2]$, $\dots$, $]9,10]$, et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle vaut 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe).

Le script (1) dans lequel les variables aléatoires suivent la loi exponentielle de paramètre 1, renvoie l'histogramme (1) ci-dessous, alors que le script (2) dans lequel les variables suivent la même loi que Y_n, renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi $n = 1000$.





Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des variables aléatoires (Y_n) ?

3. (a) Déterminer la fonction de répartition F_{Y_n} de la variable Y_n définie à la question 2.

   (b) Pour tout réel x positif ou nul, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x)$.

   (c) Démontrer le résultat conjecturé à la question 2.b.