DM13

Correction du devoir maison

Exercice 1 (Edhec 2018)

1. On peut utiliser les commandes suivantes :

```
X = grand(1,1,'exp',2)
Y = sqrt(X)
```

2. (a) Notons que $X \geq 0$ presque surement, et donc que Y est bien définie et est positive presque surement. Ainsi pour tout $x < 0$, on a :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = 0.$$

Soit à présent $x \geq 0$. On a :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\sqrt{X} \leq x) = P(X \leq x^2) = F_X(x^2) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ainsi on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(b) Notons tout d'abord que F_Y est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$. En 0, on a :

$$\lim_{x \to 0^-} F_Y(x) = 0 = F_Y(0) = \lim_{x \to 0^+} F_Y(x).$$

Donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$. De plus F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Donc Y est une variable à densité.

Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$F_Y'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Ainsi une densité de Y est (avec un choix arbitraire pour la valeur en 0) :

$$\boxed{f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

3. (a) Si $Z \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$, alors Z admet un moment d'ordre 2 et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t = E(Z^2) \underset{\text{f. de Huygens}}{=} V(Z) + E(Z)^2 = 1 + 0^2 \boxed{= 1.}$$

(b) Puisque $t \mapsto \dfrac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est positive et paire, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t$ converge absolument et vaut $\dfrac{1}{2}$. Par linéarité, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Y(t) \,\mathrm{d}t$ converge absolument également, et vaut $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. Ainsi $\boxed{E(Y) \text{ existe et on a } E(Y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$

4. (a) Puisque X est à valeurs positives, $e^{-X/2}$ est à valeurs dans $]0,1]$ et donc $\boxed{U(\Omega)=[0,1[.}$

   (b) Puisque U est à valeurs dans $[0,1[$, on a $F_U(x)=1$ pour tout $x\geq 1$ et $F_U(x)=0$ pour tout $x<0$.

   Soit à présent $x\in[0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}F_U(x)&=P(1-e^{-X/2}\leq x)=P(1-x\leq e^{-X/2})\\&=P(\ln(1-x)\leq -\frac{X}{2})\quad\text{ car ln croissant et } 1-x>0\\&=P(X\leq -2\ln(1-x))=1-e^{\ln(1-x)}=x.\end{aligned}$$

   Ainsi on a :

$$\boxed{F_U : x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x & \text{si } 0\leq x<1\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}}$$

   $\boxed{U \text{ suit donc une loi uniforme sur } [0,1].}$

   (c) On a $U=1-e^{-X/2}\Leftrightarrow \boxed{X=-2\ln(1-U)}$. On peut donc utiliser les commandes suivantes pour simuler la variable Y.

```
U = rand()
X = -2*log(1-U)
Y = sqrt(X)
```

Exercice 2 (Edhec 2018)

1. (a) Toutes les colonnes de J_n sont identiques et non nulles, donc $\boxed{rg(J_n)=1}$. Ainsi 0 est valeur propre de J_n et $\boxed{\dim(E_0(J_n))=n-rg(J_n)=n-1}$.

   (b) On a $J_nV_n=nV_n$. Donc V_n (qui est non nul) est un vecteur propre de J_n associé à la valeur propre n.

   (c) On a obtenu deux valeurs propres 0 et n de J_n et on a $\dim(E_n(J_n))\geq 1$ et $\dim(E_0(J_n)=n$. On a donc :

$$n=(n-1)+1\leq \dim(E_0(J_n))+\dim(E_n(J_n))\leq \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(J_n)}\dim(E_\lambda(J_n))\underset{\text{cours}}{\leq} n.$$

   Ainsi on a $\dim(E_0(J_n))+\dim(E_n(J_n))=n$, et donc $\dim(E_n(J_n))=1$, J_n est diagonalisable (ce qu'on pouvait deviner puisque J_n est symétrique réelle), et surtout que $\boxed{\mathrm{Sp}(J_n)=\{0,n\}}$.

2. Les applications $x\mapsto -\sum_{k=1}^n x_k^2$ et $x\mapsto\sum_{k=1}^n x_k$ sont polynomiales donc $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. Par composition avec $u\mapsto e^u$ qui est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et par produit, $\boxed{f_n \text{ est aussi de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^n.}$

3. (a) Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on a :

$$\partial_i(f_n)(x)=\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right)+\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)(-2x_i)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\boxed{=\left(1-2x_i\sum_{k=1}^n x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right)}.$$

(b) On résout le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_1 f_n(x) = 0 \\ \quad\vdots \\ \partial_n f_n(x) = 0 \end{cases} \underset{\exp>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1 = 2x_1 \displaystyle\sum_{k=1}^n x_k \\ \quad\vdots \\ 1 = 2x_n \displaystyle\sum_{k=1}^n x_k \end{cases}$$

De ce système, on déduit en particulier que $\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k \neq 0$. Ainsi x est un point critique de f_n si et seulement si :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k} \\ \quad\vdots \\ x_n = \dfrac{1}{2\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2nx_1} \\ x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{2\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = \dfrac{1}{2n} \\ x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{2\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = \frac{1}{\sqrt{2n}} \quad \text{ou } x_1 = \cdots = x_n = -\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$\boxed{f_n \text{ possède donc deux points critiques } a = \frac{1}{\sqrt{2n}}(1,1,\dots,1) \text{ et } b = -a.}$$

4. (a) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$\partial^2_{i,i}(f)(x) = \left(-2\sum_{k=1}^n x_k - 2x_i\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) + \left(1 - 2x_i\sum_{k=1}^n x_k\right)(-2x_i)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right)$$

$$\boxed{= \left(-4x_i + (4x_i^2 - 2)\sum_{k=1}^n x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right)}$$

Et pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $j \neq i$, on a :

$$\partial^2_{j,i}(f)(x) = -2x_i \exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) + \left(1 - 2x_i\sum_{k=1}^n x_k\right)(-2x_j)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right)$$

$$\boxed{= \left(-2x_i - 2x_j + 4x_ix_j\sum_{k=1}^n x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right)}$$

(b) On a pour tout $i, j \in [\![1,n]\!]$ tels que $i \neq j$:

$$\begin{aligned}\partial^2_{i,i} f(a) &= \left(-\frac{4}{\sqrt{2n}} + \left(\frac{4}{2n} - 2\right)\frac{n}{\sqrt{2n}}\right)\exp\left(-\frac{n}{2n}\right) = \left(-\frac{4}{\sqrt{2n}} + \frac{2-2n}{\sqrt{2n}}\right)\frac{1}{\sqrt{e}} \\ &= \frac{-2-2n}{\sqrt{2ne}} = \frac{-2}{\sqrt{2ne}} + \frac{-2n}{\sqrt{2ne}}\end{aligned}$$

et

$$\partial^2_{j,i} f(a) = \left(-\frac{4}{\sqrt{2n}} + \frac{4}{2n}\frac{n}{\sqrt{2n}}\right)\exp\left(-\frac{n}{2n}\right) = \frac{-2}{\sqrt{2ne}}.$$

Ainsi la Hessienne de f_n en a est donc :

$$H_n(a) = \frac{-2}{\sqrt{2ne}}J_n + \frac{-2n}{\sqrt{2ne}}I_n \boxed{= \frac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n).}$$

(c) Déterminons tout d'abord les valeurs propres de $nI_n + J_n$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(nI_n + J_n) &\Leftrightarrow \mathrm{rg}((nI_n + J_n) - \lambda I_n) < n \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}(J_n - (\lambda - n)I_n) < n \\ &\Leftrightarrow (n - \lambda) \in \mathrm{Sp}(J_n) = \{0, n\}\end{aligned}$$

Ainsi on a $\mathrm{Sp}(nI_n + J_n) = \{n, 2n\}$, et donc $\boxed{\mathrm{Sp}(H_n(a)) = \left\{\frac{-2n}{\sqrt{2ne}}, \frac{-4n}{\sqrt{2ne}}\right\}}$.

(d) Puisque $\mathrm{Sp}(H_n(a)) \subset \mathbb{R}_-^*$, $\boxed{f_n \text{ admet un maximum local en } a.}$

(e) Comme a est un maximum local, il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathscr{B}(a, r), \quad f_n(x) \leq f_n(a).$$

Notons d'autre part que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $f_n(-x) = -f_n(x)$. On obtient donc que pour tout $x \in \mathscr{B}(b, r)$, $-x$ appartient à $\mathscr{B}(a, r)$ et on a :

$$f(-x) \leq f(a) = f(-b) \quad \Rightarrow \quad -f(x) \leq -f(b) \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(b).$$

Ainsi $\boxed{f \text{ admet un minimum local en } b.}$

Autre méthode. On peut aussi observer que $H_n(b) = -H_n(a)$. Donc les valeurs propres de $H_n(b)$ sont toutes positives, et on retrouve que f_n admet un minimum local en b.

5. (a) La fonction h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions qui le sont, et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad h'(t) = e^{-t^2}(1 - 2t^2).$$

On a $h(t) \geq 0$ si et seulement si $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. On obtient le tableau de variations suivant :

t	0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
h	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	↘	0

On a $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) \underset{u=t^2}{=} \lim\limits_{u \to +\infty} u^{1/2} e^{-u} = 0$ par croissance comparée. et $h(1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2e}$.

(b) Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

D'où en élevant au carré :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \times y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$$

Étant donné l'inégalité demandée, prenons $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$. On obtient :

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).}$$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned}|f_n(x)| &= \left|\sum_{k=1}^n x_k\right| \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\\ &\leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \qquad \text{d'après la question précédente}\\ &= \sqrt{n} \cdot h\left(\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\right) \leq \sqrt{n} \cdot h(1/\sqrt{2}) = \sqrt{\frac{n}{2e}}\end{aligned}$$

Ainsi on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f_n(b) = -\sqrt{\frac{n}{2e}} \leq f_n(x) \leq \sqrt{\frac{n}{2e}} = f_n(a).$$

Donc $\boxed{f_n \text{ admet un minimum global en } b \text{ et un maximum global en } a.}$

6. (a) Rappelons que $H_n(a) = -\sqrt{\frac{2}{ne}}(nI_n + J_n)$, que la commande `eye(n,m)` crée la matrice identité de taille $n \times m$ (éventuellement complétée par des lignes ou des colonnes de 0 si $n \neq m$), et que la commande `ones(n,m)` crée une matrice de taille $n \times m$ ne contenant que des 1. On propose le script suivant.

```
n = input('Entrer n')
H = sqrt(2/(n*%e))*(n*eye(n,n)+ones(n,n))
disp(H)
```

(b) La nappe tracée correspond à une fonction qui possède un maximum local (qui est probablement global, même si on ne connait le graphe de la fonction que localement) et un minimum local. De plus, le maximum local est atteint en un point dont les deux coordonnées sont positives, qui pourrait donc être $a = (1/2, 1/2)$, et de même le minimum local semble atteint en un point qui pourrait être $b = -a$. Notons enfin qu'on a bien graphiquement la symétrie donnée par l'égalité $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. Donc avec les informations dont on dispose, $\boxed{\text{il est plausible que la nappe soit une représentation de la fonction } f_2.}$

Exercice 3 (Ecricome 2006)

1. (a) La fonction $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[\mapsto 1+xt$ est polynomiale donc $\mathscr{C}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Par composition avec $u \mapsto \sqrt{u}$ $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a que $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[\mapsto \sqrt{1+xt}$ est $\mathscr{C}^2$.

De même, $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[\mapsto -t^2$ est polynomiale donc $\mathscr{C}^2$, et $u \mapsto e^u$ est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Par composition, $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[\mapsto e^{-t^2}$ est $\mathscr{C}^2$.

Par produit, on en déduit que $\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^2 \text{ sur } [0,+\infty[\times[0,+\infty[.}$

(b) Pour tout $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, on a (en utilisant la formule $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$) :

$$\boxed{\partial_1 f(x,t) = e^{-t^2}\frac{t}{2\sqrt{1+xt}} = e^{-t^2}\frac{t}{2}(1+xt)^{-1/2}}$$

et (en utilisant la formule $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$) :

$$\boxed{\partial_{1,1}^2 f(x,t) = -e^{-t^2}\frac{t^2}{4}(1+xt)^{-3/2} = -e^{-t^2}\frac{t^2}{4(1+xt)^{3/2}}.}$$

(c) Pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, on a $1+xt \geq 1$, et donc :

$$\left|\partial^2_{1,1} f(x,t)\right| = e^{-t^2}\frac{t}{4}(1+xt)^{-3/2} = -e^{-t^2}\frac{t}{4(1+xt)^{3/2}} \boxed{\leq \frac{t^2}{4}e^{-t^2}.}$$

2. Soit $\alpha > 0$. La fonction $t \mapsto t^\alpha e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc l'intégrale est généralisée en $+\infty$. On a :

- $t^2 t^\alpha e^{-t^2} \underset{u=t^2}{=} u^{1+\alpha/2}e^{-u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, de sorte que $t^\alpha e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$;
- $\dfrac{1}{t^2} > 0$ pour tout $t > 0$;
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en $+\infty$ d'exposant $2 > 1$.

Par théorème de comparaison, on en déduit que $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

Soit $x \geq 0$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}\sqrt{1+xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc l'intégrale est généralisée en $+\infty$. Et on a :

- $e^{-t^2}\sqrt{1+xt} \underset{t\mapsto+\infty}{\sim} e^{-t^2}\sqrt{x}t^\alpha$ avec $\alpha = 1/2 > 0$;
- $e^{-t^2}t^\alpha \geq 0$ pour tout $t \geq 0$;
- l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (on vient de le faire.

Par théorème de comparaison, $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,\mathrm{d}t \text{ converge pour tout } x \geq 0.}$

On conclut de la même manière avec l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{\sqrt{1+xt}}\,\mathrm{d}t$, en remarquant que :

$$\frac{te^{-t^2}}{\sqrt{1+xt}} \underset{t\mapsto+\infty}{\sim} = \frac{te^{-t^2}}{\sqrt{xt}} = \frac{t^{1/2}e^{-t^2}}{\sqrt{x}}.$$

3. (a) Soient $x, y \in [0,+\infty[$ tels que $x \leq y$. On a pour tout $t \geq 0$:

$$1+xt \leq 1+yt \underset{u\mapsto\sqrt{u}\text{ croissante}}{\Rightarrow} \sqrt{1+xt} \leq \sqrt{1+yt} \underset{e^{-t^2}\text{ positive}}{\Rightarrow} e^{-t^2}\sqrt{1+xt} \leq e^{-t^2}\sqrt{1+yt}$$

Et par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+yt}\,\mathrm{d}t.$$

Donc $\boxed{g \text{ est croissante sur } [0,+\infty[.}$

(b) Soit $t \geq 0$ **fixé**. La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $x \mapsto \partial_1 f(x,t)$, et de dérivée seconde $x \mapsto \partial^2_{1,1} f(x,t)$ dont on a vu précédemment qu'elle est bornée par la quantité $\dfrac{t^2}{2}e^{-t^2}$.

Soit $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$. D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée entre x et x_0, on obtient :

$$\boxed{|f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\partial_1 f(x_0,t)| \leq \frac{t^2}{4}e^{-t^2}\frac{|x-x_0|^2}{2} = \frac{t^2}{8}e^{-t^2}|x-x_0|^2.}$$

(c) Intégrons l'inégalité précédente entre 0 et $+\infty$ (ce qui est légitime car l'intégrale du terme de droite converge d'après la question 2.) :

$$\int_0^{+\infty} |f(x,t) - f(x_0,t) - (x - x_0)\partial_1 f(x_0,t)| \, \mathrm{d}t \leq \frac{|x - x_0|^2}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} \, \mathrm{d}t.$$

D'où par l'inégalité triangulaire (tout converge bien absolument par ce qui précède) :

$$\begin{aligned}\left| g(x) - g(x_0) - (x - x_0) \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0,t) \, \mathrm{d}t \right| &= \left| \int_0^{+\infty} f(x,t) - f(x_0,t) - (x - x_0)\partial_1 f(x_0,t) \, \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} |f(x,t) - f(x_0,t) - (x - x_0)\partial_1 f(x_0,t)| \, \mathrm{d}t \\ &\boxed{\leq \frac{|x - x_0|^2}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} \, \mathrm{d}t}\end{aligned}$$

(d) Il s'agit de revenir à la définition de la dérivabilité : g est dérivable en x_0 si et seulement si la limite du taux d'accroissement existe. Or, en divisant la relation de la question précédente par $|x - x_0|$, il vient pour $x \neq x_0$ que :

$$\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0,t) \, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{|x - x_0|}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

Cette dernière intégrale est indépendante de x, et donc :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|x - x_0|}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} \, \mathrm{d}t = 0.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0,t) \, \mathrm{d}t \right| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0,t) \, \mathrm{d}t.$$

Ainsi $\boxed{g \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et on a } g'(x_0) = \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0,t) \, \mathrm{d}t.}$ Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in [0, +\infty[$, on en déduit que g est dérivable sur cet intervalle.

Enfin $t \mapsto \partial_1 f(x_0,t)$ est une fonction positive sur $\mathbb{R}_+$, et donc par positivité de l'intégrale, $g'(x_0) \geq 0$, ce qui permet de retrouver le fait que $\boxed{g \text{ est croissante.}}$

Problème (EML 2014)

Partie I : Quelques généralités.

1. L'application Φ_A va clairement de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. De plus pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, pour tout $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda M + \mu N) &= A(\lambda M + \mu N) - (\lambda M + \mu N)A = \lambda AM + \mu AN - \lambda MA - \mu NA \\ &= \lambda(AM - MA) + \mu(AN - NA) = \lambda \Phi_A(M) + \mu \Phi_A(N).\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\Phi_A \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

2. On a $\boxed{\Phi_A(I_n) = 0_n}$. Donc $\mathrm{Ker}(\Phi_A) \neq \{0_n\}$ et $\boxed{\Phi_A \text{ n'est pas injectif}}$. Comme c'est un endomorphisme et que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $\boxed{\Phi_A \text{ n'est pas surjectif non plus.}}$

Partie II : Étude d'un cas particulier.

On suppose dans cette partie seulement que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. A est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres sont donc sur sa diagonale. Ainsi on a $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\}}$, et A admet 2 valeurs propres distinctes et est de taille 2×2. $\boxed{A \text{ est donc diagonalisable.}}$

4. On calcule l'image par Φ_A de la base canonique.

$$\Phi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \Phi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \Phi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \Phi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de Φ_A dans la base canonique $\mathscr{B}$ est donc :

$$\boxed{M = M_{\mathscr{B}}(\Phi_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Si on note $C_i(M)$ les colonnes de M, on constate que $C_1 = 2C_2 = -C_4$, et que C_1 et C_4 sont non colinéaires. Donc $\boxed{\text{le rang de } M \text{ est égal à 2.}}$

5. Puisque $\mathrm{rg}(\Phi_A) = \mathrm{rg}(M) = 2$, on en déduit que 0 est valeur propre de Φ_A et on a $\dim(E_0(\Phi_A)) = \dim(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})) - 2 = 2$ par le théorème du rang.

Cherchons d'autres valeurs propres « à vue ». On remarque que :

$$M - 2I_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

est de rang < 4 (car sa troisième ligne est nulle). Donc 2 est valeur propre de M. De même on montre que -2 est aussi valeur propre car $rg(M + 2I_4) < 4$. On a donc $\dim(E_2(\Phi_A)) \geq 1$ et $\dim(E_{-2}(\Phi_A)) \geq 1$. En particulier on a :

$$4 \leq \dim(E_2(\Phi_A)) + \dim(E_{-2}(\Phi_A)) + \dim(E_0(\Phi_A)) \underset{\text{cours}}{\leq} \dim(E) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) = 4.$$

On en déduit que :

$$\dim(E_2(\Phi_A)) + \dim(E_{-2}(\Phi_A)) + \dim(E_0(\Phi_A)) = 4 \text{ et que } \dim(E_2(\Phi_A)) = \dim(E_{-2}(\Phi_A)) = 1.$$

En particulier, il n'y a pas d'autre valeur propre pour Φ_A, et $\boxed{\mathrm{Sp}(\Phi_A) = \{-2, 0, 2\}}$. Et comme $\sum_{\lambda \in Sp(\Phi_A)} \dim(E_\lambda(\Phi_A)) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on en déduit que $\boxed{\Phi_A \text{ est diagonalisable.}}$

Partie III : Étude du cas où A est diagonalisable.

6. On suppose que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Donc il existe P inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale à coefficients réels tels que :

$$D = P^{-1}AP.$$

On transpose cette égalité :

$$D = {}^tD = {}^t(P^{-1}AP) = {}^tP\,{}^tA\,{}^t(P^{-1}) = {}^tP\,{}^tA({}^tP)^{-1}.$$

Puisque ${}^tP$ est inversible (car P l'est), ${}^tA$ est semblable à une matrice diagonale. Donc $\boxed{{}^tA \text{ est bien diagonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

7. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $AX = \lambda X$, et $\mu \in \mathrm{Sp}({}^tA)$ tel que ${}^tAY = \mu Y$, soit en transposant ${}^tYA = \mu\, {}^tY$.

   On a :

$$\Phi_A(X\,{}^tY) = (AX)\,{}^tY - X({}^tYA) = \lambda X\,{}^tY - X\mu\,{}^tY = (\lambda - \mu)X\,{}^tY.$$

   Reste à justifier que la matrice $X\,{}^tY$ est bien non-nulle pour que ça soit bien un vecteur propre. Notons pour cela $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors on a :

$$X\,{}^tY = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix} = (x_iy_j)_{1\leq i,j\leq n}.$$

   Puisque X et Y sont non nuls, il existe $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $x_i \neq 0$ et $y_j \neq 0$. Mais alors on a $(X\,{}^tY)_{i,j} = x_iy_j \neq 0$. Donc $X\,{}^tY$ est bien non nul.

   Ainsi $\boxed{X\,{}^tY \text{ est bien un vecteur propre de } \Phi_A.}$

8. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Puisque $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont des bases de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_n$ des scalaires tels que :

$$V_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k \quad \text{et} \quad V_j = \sum_{l=1}^{n} \mu_l Y_l.$$

   On obtient alors :

$$V_i\,{}^tV_j = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k\right)\,{}^t\left(\sum_{l=1}^{n} \mu_l Y_l\right) = \sum_{1\leq k,l\leq n} \lambda_k\mu_l X_k\,{}^tY_l.$$

   Ainsi $\boxed{V_i\,{}^tV_j \text{ appartient au sous-espace vectoriel } F \text{ de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ engendré par } \mathscr{F}}$.

   Ceci étant vrai pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on en déduit que F contient la famille génératrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constituée des $E_{i,j}$. Donc F est l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tout entier. On en déduit que la famille $\mathscr{F}$ est génératrice. Comme elle est de plus de cardinal $n^2 = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$, $\boxed{\mathscr{F} \text{ est donc une base de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

9. On a supposé que A est diagonalisable, donc il existe une base $(X_1, \dots, X_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

   D'après la question 6., ${}^tA$ est aussi diagonalisable. Donc il existe une base $(Y_1, \dots, Y_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de ${}^tA$.

   D'après la question 8., la famille $\mathscr{F} = (X_i\,{}^tY_j)_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. De plus ses éléments sont tous des vecteurs propres de Φ_A d'après la question 7.

   Ainsi on a établi l'existence d'une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de Φ_A. Donc $\boxed{\Phi_A \text{ est bien diagonalisable.}}$

10. On a construit à la question précédente une base $(X_i\,{}^tY_j)_{1\leq i,j\leq n}$ de vecteurs propres de Φ_A. De plus on a vu à la question 7. que pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$\Phi_A(X_i\,{}^tY_j) = (\lambda_i - \mu_j)X_i\,{}^tY_j$$

   Ainsi les valeurs propres de Φ_A sont exactement les réels de la forme $\lambda - \mu$ où $\lambda \in Sp(A)$ et $\mu \in Sp({}^tA)$.

Reste à justifier que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(\,^tA)$ pour obtenir le résultat souhaité. Il suffit pour cela de noter que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow rg(A - \lambda I_n) < n \Leftrightarrow rg(\,^t(A - \lambda I_n)) < n \Leftrightarrow rg(\,^tA - \lambda I_n) < n \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}(\,^tA).$$

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } \Phi_A \text{ sont donc exactement les réels } \lambda - \mu \text{ où } \lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(A).}$

Partie IV : Étude d'un sous-espace propre de Φ_A associé à une valeur propre non nulle.

11. Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Phi_A(T^k) = \lambda k T^k$.

Initialisation. On a $\Phi_A(T^0) = \Phi_A(I_n) = 0_n = \lambda \times 0 \times T^0$. Donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété au rang k vraie. On a par hypothèse de récurrence :

$$\Phi_A(T^k) = \lambda k T^k \quad \Rightarrow \quad AT^k = T^kA + \lambda k T^k.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\Phi_A(T^{k+1}) &= AT^{k+1} - T^{k+1}A = (AT^k)T - T^{k+1}A \\
&= (T^kA + \lambda k T^k)T - T^{k+1}A = T^kAT + \lambda k T^{k+1} - T^{k+1}A \\
&= T^k(AT - TA) + \lambda k T^{k+1} = T^k\Phi_A(T) + \lambda k T^{k+1} \\
&= T^k(\lambda T) + \lambda k T^{k+1} \text{ car } T \text{ vecteur propre} \\
&= \lambda(k+1)T^{k+1}
\end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $k+1$.

Conclusion. Par principe de récurrence, on a donc montré que $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \Phi_A(T^k) = \lambda k T^k.}$

12. Par l'absurde, supposons que $\forall 0 \leq q \leq n^2$, $T^q \neq 0_n$. On a d'après la question précédente :

$$\Phi_A(T^q) = \lambda q T^q.$$

Donc T^q est un vecteur propre de Φ_A pour la valeur propre λq. En particulier, λq est valeur propre de Φ_A pour tout $0 \leq q \leq n$, soit $(n+1)$ valeurs propres distinctes au moins (car $\lambda \neq 0$). Or Φ_A étant un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il ne peut avoir strictement plus de $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$ valeurs propres distinctes. D'où une contradiction.

Ainsi, $\boxed{\text{il existe un entier } q \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } T^q = 0 \text{ et } q \leq n^2.}$

13. On définit donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^p = 0$ et $T^{p-1} \neq 0$ (autrement dit, T est nilpotente, d'indice de nilpotence p).

Comme $T^{p-1} \neq 0_n$, l'une de ces colonnes est non-nulle. Soit $j \in [\![1, n]\!]$ le numéro de cette colonne qu'on notera C_j. On a alors :

$$T^{p-1}V_j = C_j \neq 0_{n,1}.$$

$\boxed{\text{D'où l'existence de } X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ (= V_j) \text{ tel que } T^{p-1}X \neq 0_{n,1}.}$

Montrons à présent que $(X, TX, \dots, T^{p-1}X)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{R}$ des scalaires tels que :

$$\lambda_0 X + \lambda_1 TX + \dots \lambda_{p-1}T^{p-1}X = 0_{n,1}. \qquad (*)$$

Montrons que $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$. Pour cela, on multiplie $(*)$ par T^{p-1}. On obtient :

$$\lambda_0 T^{p-1}X + \underbrace{\lambda_1 T^pX + \dots \lambda_{p-1}T^{2p-2}X}_{=0_{n,1}} = 0_{n,1} \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 T^{p-1}X = 0_{n,1}$$

Puisque $T^{p-1}X \neq 0_{n,1}$, on obtient $\lambda_0 = 0$.

De même, en multipliant $(*)$ par T^{p-2} à présent, on obtient que $\lambda_1 T^{p-1}X = 0_{n,1}$ et donc que $\lambda_1 = 0$. Et ainsi de suite, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0$.

Ainsi $\boxed{\text{la famille } (X, TX, \ldots, T^{p-1}X) \text{ est libre dans } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Son cardinal est donc inférieur à la dimension de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, soit $\boxed{p \leq n}$.

Partie V : Étude du cas où A est symétrique.

14. Montrons que l'application $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- *Linéarité à gauche.* Soient $M = (m_{i,j}), M' = (m'_{i,j}), N = (n_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}(\lambda M + \mu M'|N) &= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} (\lambda M + \mu M')_{i,j} n_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} (\lambda m_{i,j} + \mu M'_{i,j}) n_{i,j} \\ &= \lambda \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} m_{i,j} n_{i,j} + \mu \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} m'_{i,j} n_{i,j} = \lambda(M|N) + \mu(M'|N)\end{aligned}$$

  D'où la linéarité à gauche.

- *Symétrie.* Pour toutes matrices $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$(M|N) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} m_{i,j} n_{i,j} = (N|M).$$

  D'où la symétrie, et donc également la linéarité à droite.

- *Positif.* Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n(\mathbb{R})}$, on a :

$$(M|M) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} m_{i,j}^2 \geq 0.$$

- *Défini positif.* Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n(\mathbb{R})}$, on a :

$$(M|M) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} m_{i,j}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad m_{i,j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M = 0_{n,n}.$$

Ainsi $\boxed{(\cdot|\cdot) \text{ est bien un produit scalaire sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

Remarque. C'est d'ailleurs celui qu'on rencontre habituellement, à savoir $(M|N) = \mathrm{Tr}({}^tMN)$. Il est simplement exprimé ici différemment.

15. Soit $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$(M\,{}^tN|I_n) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} (M\,{}^tN)_{i,j} \underbrace{(I_n)_{i,j}}_{=0 \text{ si } i\neq j} = \sum_{i=1}^n (M\,{}^tN)_{i,i} (I_n)_{i,i} = \sum_{i=1}^n (M\,{}^tN)_{i,i}$$

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$(M\,{}^tN)_{i,i} = \sum_{j=1}^n (M)_{i,j} ({}^tN)_{j,i} = \sum_{j=1}^n (M)_{i,j} (N)_{i,j} = \sum_{j=1}^n m_{i,j} n_{i,j}.$$

Ainsi on a :

$$(M\,{}^tN|I_n) = \sum_{i=1}^n (M\,{}^tN)_{i,i} = \sum_{j=1}^n m_{i,j} n_{i,j} \boxed{= (M|N).}$$

D'où le résultat souhaité.

16. La matrice P est orthogonale. Donc ses colonnes $C_1, \dots, C_n$ forment une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (Attention ce n'est pas le même que $(\cdot|\cdot)$ qui lui est défini sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$). Ainsi on a pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\langle C_i, C_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{soit encore} \quad \boxed{{}^tC_iC_j = \delta_{i,j},}$$

où $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$ est le symbole de Kronecker.

17. On avait déjà fait ce calcul auparavant : si on note $C_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $C_j = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors on a $C_i\ {}^tC_j = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix} = (x_iy_j)_{1\leq i,j\leq n}$. On obtient :

$$(C_i\ {}^tC_j|I_n) = \sum_{(k,l)\in[\![1,n]\!]^2} (C_i\ {}^tC_j)_{k,l}(I_n)_{k,l} = \sum_{k=1}^n (C_i\ {}^tC_j)_{k,k} = \sum_{k=1}^n x_ky_k = {}^tC_iC_j \boxed{= \delta_{i,j}.}$$

18. Pour tout $(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$, on a :

$$(C_i\ {}^tC_j|C_k\ {}^tC_l) \overset{15.}{=} ((C_i\ {}^tC_j)\ {}^t(C_k\ {}^tC_l)|I_n) = (C_i \underbrace{{}^tC_jC_l}_{\delta_{j,l}}\ {}^tC_k|I_n)$$

$$= \delta_{j,l} \underbrace{(C_i\ {}^tC_k|I_n)}_{\delta_{i,k} \text{ d'après 17.}} \boxed{= \delta_{j,l} \cdot \delta_{i,k}.}$$

19. Pour tout $1 \leq i,j,k,l \leq n$, on a montré que :

$$(C_i\ {}^tC_j|C_k\ {}^tC_l) = \delta_{j,l} \cdot \delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ et } j = l \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Donc la famille $\mathscr{G} = (C_i\ {}^tC_j)_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormé pour le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$. En particulier c'est donc une famille libre. Comme son cardinal est $n^2 = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$, on en déduit que $\boxed{\mathscr{G} \text{ une base orthonormée de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

Enfin, les vecteurs colonnes C_i de P sont des vecteurs propres de A (en tant que matrice de passage de A à une matrice diagonale), et de ${}^tA = A$ (car A est symétrique). D'après la question 7., $\boxed{\text{les matrices } C_i\ {}^tC_j \text{ sont vecteurs propres de } \Phi_A \text{ pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2.}$