DM13

Correction du devoir maison

Exercice 1 (EDHEC 2010)

1. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la fonction $(x_1,\dots,x_n) \mapsto \dfrac{1}{x_i}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U comme quotient de fonctions polynomiales, donc $\mathscr{C}^2$ sur U, dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus $(x_1,\dots,x_n) \mapsto x_1+\dots+x_n$ est polynomiale donc $\mathscr{C}^2$ sur U. Par sommes et produit, on en déduit que $\boxed{f_n \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } U.}$

2. Calculons les dérivées partielles de f_n sur U. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a :
$$\partial_i f_n(x_1,\dots,x_n) = \left(\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}\right) - \frac{1}{x_i^2}(x_1+\dots+x_n)$$
Cherchons les points critiques de f_n. On a :
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}\right) - \frac{1}{x_1^2}(x_1+\dots+x_n) = 0 \\ \left(\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}\right) - \frac{1}{x_2^2}(x_1+\dots+x_n) = 0 \\ \dots \\ \left(\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}\right) - \frac{1}{x_n^2}(x_1+\dots+x_n) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}\right) - \frac{1}{x_1^2}(x_1+\dots+x_n) = 0 & (L_1) \\ \left(\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}\right)(x_1+\dots+x_n) = 0 & (L_2)-(L_1) \\ \dots \\ \left(\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_n^2}\right)(x_1+\dots+x_n) = 0 & (L_n)-(L_1) \end{cases}$$
$$\underset{x_1+\dots+x_n\neq 0 \text{ sur } U}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left(\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}\right) - \frac{1}{x_1^2}(x_1+\dots+x_n) = 0 \\ \frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2} = 0 \\ \dots \\ \frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_n^2} = 0 \end{cases}$$
$$\underset{x_1,\dots,x_n>0 \text{ sur } U}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left(\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}\right) - \frac{1}{x_1^2}(x_1+\dots+x_n) = 0 \\ x_1 = x_2 \\ \dots \\ x_1 = x_n \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{n}{x_1} - \frac{1}{x_1^2}(nx_1) = 0 \\ x_1 = x_2 \\ \dots \\ x_1 = x_n \end{cases}$$
Ainsi $\boxed{f_n \text{ possède une infinité de points de critiques, à savoir tous les } (a,\dots,a) \text{ avec } a>0.}$

3. (a) Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on a :
$$\partial^2_{i,i} f(x_1,\dots,x_n) = -\frac{1}{x_i^2} - \frac{1}{x_i^2} - (-2)x_i^{-3}(x_1+\dots+x_n) \boxed{= -\frac{2}{x_i^2} + 2\frac{x_1+\dots+x_n}{x_i^3},}$$
$$\boxed{\partial^2_{j,i} f(x_1,\dots,x_n) = -\frac{1}{x_j^2} - \frac{1}{x_i^2}.}$$
(b) Soit $(a,\dots,a)$ un point critique de f_n avec $a>0$. On a pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$:
$$\partial^2_{i,i} f(a,\dots,a) = -\frac{2}{a^2} + 2\frac{na}{a^3} = \frac{2}{a^2}(n-1).$$

$$\partial^2_{j,i} f(a,\dots,a) = -\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2} = -\frac{2}{a^2}.$$

Ainsi, on a :

$$\nabla^2 f(a,\dots,a) = \frac{2}{a^2}\begin{pmatrix} (n-1) & -1 & \dots & -1 \\ -1 & (n-1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & (n-1) \end{pmatrix} \boxed{= \frac{2}{a^2}\left(nI_n - J_n\right).}$$

4. (a) Toutes les colonnes de J_n sont identiques et non nulles, donc $\boxed{\mathrm{rg}(J_n) = 1.}$ Ainsi $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } J_n \text{ et } \dim(E_0(J_n)) = n - \mathrm{rg}(J_n) = n-1.}$

   (b) La matrice J_n étant symétrique réelle, elle est diagonalisable. De plus, 0 est valeur propre de J_n et $\dim(E_0(J_n)) = n-1$. Reste donc une valeur propre λ qu'il reste à déterminer, qu'on obtient en prenant la trace :

$$\lambda + \underbrace{0 + \dots + 0}_{(n-1)\text{ fois}} = \mathrm{Tr}(J_n) = n.$$

   Ainsi $\lambda = n$, et $\boxed{\text{les valeurs propres de } J_n \text{ sont } 0 \text{ et } n.}$

   Autre méthode. On a $J_n \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = n\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$. Donc n est valeur propre et $\dim(E_n(J_n)) \geq 1$.

   On obtient :

$$(n-1) + 1 \leq \dim(E_0(J_n)) + \dim(E_n(J_n)) \underbrace{\leq}_{\text{Cours}} n.$$

   Ainsi, $\dim(E_0(J_n)) + \dim(E_n(J_n)) = n$. On retrouve donc que J_n est diagonalisable, et surtout que $\boxed{Sp(J_n) = \{0, n\}.}$

   On a $K_n = nI_n - J_n$, donc $\boxed{\text{les valeurs propres de } K_n \text{ sont } n-0 = n \text{ et } n-n=0}$. En effet, si on note P une matrice inversible telle que $P^{-1}J_nP = diag(0,\dots,0,n$, alors on a :

$$P^{-1}K_nP = nI_n - diag(0,\dots,0,n) = diag(n,\dots,n,0)$$

   et les valeurs propres sont bien 0 et n.

   (c) Il n'est donc pas possible de conclure ici car 0 est valeur propre de la hessienne, et que toutes les autres valeurs propres sont positives.

5. **Étude du cas $n = 2$.**

   (a) On a :

$$(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1-x_2)^2 \geq 0.$$

   Ainsi on a $\boxed{(x_1+x_2)^2 \geq 4x_1x_2.}$

   (b) On a :

$$f_2(x_1,x_2) = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)(x_1+x_2) = \frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2} \geq 4 \quad \text{d'après la question précédente.}$$

   De plus, on a pour tout $a > 0$, $f_2(a,a) = \dfrac{(2a)^2}{a^2} = 4.$. Ainsi f_2 admet un minimum global sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ qui vaut 4, atteint en tout point critique (a,a) avec $a > 0$.

6. **Étude du cas général.**

   Rappelons que l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique s'écrit pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$:

   $$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \times \|y\|, \qquad \text{soit} \qquad \left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2},$$

   soit encore en élevant au carré,

   $$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right).$$

   Afin de faire apparaitre f_n, appliquons cette inégalité avec $x = (\sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{x_n})$ et $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$.
   On obtient :

   $$\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j}\right) \qquad \text{soit encore} \qquad n^2 \leq f_n(x).$$

   De plus, en tout point critique $(a, \ldots, a)$ où $a > 0$, on a :

   $$f_n(a, \ldots, a) = \frac{n}{a} \times (na) = n^2.$$

   Ainsi $\boxed{f_n \text{ admet un minimum global sur } U\text{, égal à } n^2}$, atteint en chacun de ses points critiques $(a, \ldots, a)$ $(a > 0)$.
