DM13

Devoir maison à rendre le 09/03/2020

Exercice 1

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.
On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ et on pose $Y = \sqrt{X}$.

1. On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'exp',1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

   Écrire une (ou des) commande(s) `Scilab` utilisant `grand` et permettant de simuler Y.

2. (a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.
   (b) En déduire une densité f_Y de Y.

3. (a) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite.
   (b) En déduire que Y possède une espérance et donner sa valeur.

4. On pose $U = 1 - e^{-X/2}$.

   (a) Vérifier que $U(\Omega) = [0, 1[$.
   (b) Déterminer la fonction de répartition F_U de U et reconnaître la loi de U.
   (c) Exprimer X en fonction de U, puis en déduire une simulation `Scilab` de Y utilisant uniquement la fonction `rand`.

Exercice 2

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

1. (a) Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
   (b) Vérifier que le vecteur V_n élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, dont toutes les composantes sont égales à 1, est vecteur propre de J_n.
   (c) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n.

Dans toute la suite, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).$$

2. Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

3. (a) Montrer que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a : $\partial_i(f_n)(x) = \left(1 - 2x_i \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$.
   (b) En déduire que f_n possède deux points critiques $a = \frac{1}{\sqrt{2n}}(1, 1, \ldots, 1)$ et $b = -a$.

4. (a) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f_n.

(b) Vérifier que la hessienne de f_n en a est $H_n(a) = \dfrac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n)$.

(c) À l'aide de la première question, donner les valeurs propres de $H_n(a)$.

(d) En déduire que f_n possède un extremum local en a.

(e) Sans refaire tous les calculs, donner une conclusion concernant le point critique b.

5. (a) Étudier la fonction h qui, à tout t de $\mathbb{R}_+$, associe $h(t) = te^{-t^2}$.

   (b) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique, montrer que :

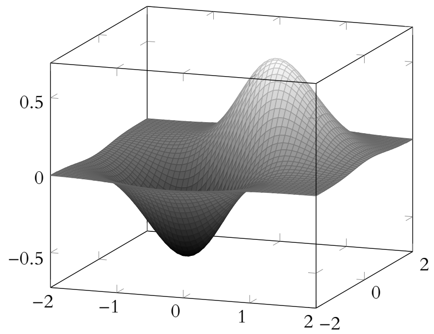
$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

   (c) Déduire des deux questions précédentes que f_n admet en a et en b des extrema globaux.

6. Question d'informatique.

   (a) Écrire des commandes `Scilab` permettant de calculer et d'afficher $H_n(a)$ pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

   (b) Dans le cas $n = 2$, la nappe suivante est-elle acceptable en tant que représentation graphique de la fonction f_2 ? Justifier.



Exercice 3

On considère la fonction f des deux variables réelles x, t, définie par :

$$f(x,t) = e^{-t^2}\sqrt{1+xt}$$

1. **Étude de f.**

   (a) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

   (b) Pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, calculer $\partial_1 f(x,t)$ et $\partial^2_{1,1} f(x,t)$.

   (c) Montrer que pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$$\left|\partial^2_{1,1} f(x,t)\right| \leq \frac{t^2}{4} e^{-t^2}.$$

2. Montrer que pour tout réel α strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2}\,dt$ est convergente.

   En déduire que pour tout réel x positif, les intégrales suivantes sont convergentes :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{\sqrt{1+xt}}\,\mathrm{d}t.$$

3. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par

$$g(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,\mathrm{d}t.$$

   (a) Sans chercher à calculer la dérivée de g, montrer que g est croissante sur $[0,+\infty[$.

   (b) Soit $x_0 \in [0,+\infty[$. Montrer que pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$$|f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\partial_1 f(x_0,t)| \leq \frac{t^2}{8} e^{-t^2} |x-x_0|^2.$$

(c) En déduire que pour $x_0 \in [0, +\infty[$,

$$\left| g(x) - g(x_0) - (x - x_0) \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0, t)\, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{|x - x_0|^2}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

(d) Montrer que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que g' est définie par :

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x, t)\, \mathrm{d}t.$$

Retrouver le sens de variations de g.

Problème

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note V_i la matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i-ème ligne qui est égal à 1. On admet que la famille $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $E_{i,j} = V_i\, {}^tV_j$. Ainsi, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ est la matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne, qui est égal à 1. On admet que la famille $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \neq \lambda I_n$.

On considère l'application Φ_A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall\, M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \Phi_A(M) = AM - MA.$$

Partie I : Quelques généralités.

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Calculer $\Phi_A(I_n)$. L'endomorphisme Φ_A est-il injectif ? surjectif ?

Partie II : Étude d'un cas particulier.

On suppose dans cette partie seulement que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et donner ses valeurs propres.

   On note $\mathscr{B}$ la base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ formée des quatre matrices suivantes : $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Écrire la matrice de Φ_A dans la base $\mathscr{B}$, puis calculer le rang de cette matrice.

5. Déterminer les valeurs propres de Φ_A, et montrer que Φ_A est diagonalisable.

Partie III : Étude du cas où A est diagonalisable.

On suppose, dans cette partie seulement, que la matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

6. Montrer que ${}^tA$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

7. Soient $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que X (resp. Y) est un vecteur propre de A (resp. de ${}^tA$). Montrer que $X\,{}^tY$ est un vecteur propre de Φ_A.

8. Soient $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ deux bases de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $\mathscr{F}$ la famille $\mathscr{F} = (X_i\,{}^tY_j)_{1\leq i,j\leq n}$.
   Montrer que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $V_i\,{}^tV_j$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $\mathscr{F}$, et en déduire que la famille $\mathscr{F}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

9. Établir que Φ_A est diagonalisable.

10. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de Φ_A est l'ensemble des différences $\lambda - \mu$ lorsque λ et μ décrivent les valeurs propres de A.

Partie IV : Étude d'un sous-espace propre de Φ_A associé à une valeur propre non nulle.

Soient λ une valeur propre non nulle de Φ_A et $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. On a alors

$$\Phi_A(T) = \lambda T \text{ et } T \neq 0.$$

11. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Phi_A(T^k) = \lambda k T^k$.

12. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^q = 0$ et $q \leq n^2$.
    On note p l'unique entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $T^p = 0$ et $T^{p-1} \neq 0$.

13. Justifier qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $T^{p-1}X \neq 0$.
    Montrer que la famille $(X, TX, \dots, T^{p-1}X)$ est libre dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et en déduire que $p \leq n$.

Partie V : Étude du cas où A est symétrique.

On suppose dans cette partie seulement, que la matrice A est symétrique : il existe donc une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. On note $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de P. Pour toutes matrices $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$(M|N) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} m_{i,j}n_{i,j}.$$

14. Montrer que l'application $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

15. Montrer que
$$\forall (M,N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad (M|N) = (M\,{}^tN|I_n).$$

16. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, calculer ${}^tC_iC_j$.

17. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, déterminer les coefficients diagonaux de la matrice $C_i\,{}^tC_j$ et en déduire la valeur de $(C_i\,{}^tC_j|I_n)$.

18. Pour tout $(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$, calculer $(C_i\,{}^tC_j|C_k\,{}^tC_l)$.

19. On considère la famille $\mathscr{G} = (C_i\,{}^tC_j)_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
    Montrer que $\mathscr{G}$ est une base orthonormée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, et qu'elle est constituée de vecteurs propres de Φ_A.