DM13

Devoir maison à rendre le 16/03/2022

Exercice 1

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère la fonction f_n définie, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de l'ouvert $U =]0, +\infty[^n$, par :

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)$$

1. Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
2. Montrer que f_n possède une infinité de points de critiques $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et les déterminer.
3. (a) Déterminer les dérivées partielles secondes de f_n.
   (b) Vérifier que la hessienne H_n de f_n en un point critique quelconque de f_n est proportionnelle à la matrice $K_n = nI_n - J_n$, où I_n désigne la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.
4. (a) Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre de J_n.
   (b) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n puis celles de K_n.
   (c) Montrer que l'on ne peut pas, de cette façon, conclure à l'existence d'un extremum local de f_n sur U.
5. **Étude du cas $n = 2$.**
   (a) Comparer les réels $(x_1 + x_2)^2$ et $4x_1x_2$.
   (b) En déduire que f_2 admet sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un minimum global et donner sa valeur.
6. **Étude du cas général.**
   On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, montrer que f_n admet un minimum global sur U, égal à n^2.