DM14

Correction du devoir maison de révisions type Edhec

Exercice 1 (Edhec 2018)

1. (a) Toutes les colonnes de J_n sont identiques et non nulles, donc $\boxed{rg(J_n) = 1}$. Ainsi 0 est valeur propre de J_n et $\boxed{\dim(E_0(J_n)) = n - rg(J_n) = n - 1}$.

   (b) On a $J_nV_n = nV_n$. Donc V_n (qui est non nul) est un vecteur propre de J_n associé à la valeur propre n.

   (c) On a obtenu deux valeurs propres 0 et n de J_n et on a $\dim(E_n(J_n)) \geq 1$ et $\dim(E_0(J_n) = n$. On a donc :

$$n = (n-1) + 1 \leq \dim(E_0(J_n)) + \dim(E_n(J_n)) \leq \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(J_n)} \dim(E_\lambda(J_n)) \underset{\text{cours}}{\leq} n.$$

   Ainsi on a $\dim(E_0(J_n)) + \dim(E_n(J_n)) = n$, et donc $\dim(E_n(J_n)) = 1$, J_n est diagonalisable (ce qu'on pouvait deviner puisque J_n est symétrique réelle), et surtout que $\boxed{\mathrm{Sp}(J_n) = \{0, n\}}$.

2. Les applications $x \mapsto -\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ et $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k$ sont polynomiales donc $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. Par composition avec $u \mapsto e^u$ qui est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et par produit, $\boxed{f_n \text{ est aussi de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^n.}$

3. (a) Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$\partial_i(f_n)(x) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)(-2x_i)\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \boxed{= \left(1 - 2x_i\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).}$$

   (b) On résout le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_1 f_n(x) = 0 \\ \vdots \\ \partial_n f_n(x) = 0 \end{cases} \underset{\exp>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1 = 2x_1 \sum_{k=1}^{n} x_k \\ \vdots \\ 1 = 2x_n \sum_{k=1}^{n} x_k \end{cases}$$

   De ce système, on déduit en particulier que $\sum_{k=1}^{n} x_k \neq 0$. Ainsi x est un point critique de f_n si et seulement si :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2\sum_{k=1}^{n} x_k} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{1}{2\sum_{k=1}^{n} x_k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2nx_1} \\ x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{2\sum_{k=1}^{n} x_k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = \dfrac{1}{2n} \\ x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{2\sum_{k=1}^{n} x_k} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = \frac{1}{\sqrt{2n}} \quad \text{ou } x_1 = \cdots = x_n = -\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$\boxed{f_n \text{ possède donc deux points critiques } a = \frac{1}{\sqrt{2n}}(1, 1, \ldots, 1) \text{ et } b = -a.}$$

4. (a) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$\partial^2_{i,i}(f)(x) = \left(-2\sum_{k=1}^n x_k - 2x_i\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) + \left(1-2x_i\sum_{k=1}^n x_k\right)(-2x_i)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right)$$
$$\boxed{= \left(-4x_i + (4x_i^2-2)\sum_{k=1}^n x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right)}$$

Et pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $j \neq i$, on a :

$$\partial^2_{j,i}(f)(x) = -2x_i\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) + \left(1-2x_i\sum_{k=1}^n x_k\right)(-2x_j)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right)$$
$$\boxed{= \left(-2x_i - 2x_j + 4x_ix_j\sum_{k=1}^n x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right)}$$

(b) On a pour tout $i, j \in [\![1,n]\!]$ tels que $i \neq j$:

$$\partial^2_{i,i}f(a) = \left(-\frac{4}{\sqrt{2n}} + (\frac{4}{2n}-2)\frac{n}{\sqrt{2n}}\right)\exp\left(-\frac{n}{2n}\right) = \left(-\frac{4}{\sqrt{2n}} + \frac{2-2n}{\sqrt{2n}}\right)\frac{1}{\sqrt{e}}$$
$$= \frac{-2-2n}{\sqrt{2ne}} = \frac{-2}{\sqrt{2ne}} + \frac{-2n}{\sqrt{2ne}}$$

et

$$\partial^2_{j,i}f(a) = \left(-\frac{4}{\sqrt{2n}} + \frac{4}{2n}\frac{n}{\sqrt{2n}}\right)\exp\left(-\frac{n}{2n}\right) = \frac{-2}{\sqrt{2ne}}.$$

Ainsi la Hessienne de f_n en a est donc :

$$H_n(a) = \frac{-2}{\sqrt{2ne}}J_n + \frac{-2n}{\sqrt{2ne}}I_n \boxed{= \frac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n).}$$

(c) Déterminons tout d'abord les valeurs propres de $nI_n + J_n$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(nI_n + J_n) &\Leftrightarrow \mathrm{rg}((nI_n + J_n) - \lambda I_n) < n \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}(J_n - (\lambda - n)I_n) < n \\ &\Leftrightarrow (n-\lambda) \in \mathrm{Sp}(J_n) = \{0, n\}\end{aligned}$$

Ainsi on a $\mathrm{Sp}(nI_n + J_n) = \{n, 2n\}$, et donc $\boxed{\mathrm{Sp}(H_n(a)) = \left\{\frac{-2n}{\sqrt{2ne}}, \frac{-4n}{\sqrt{2ne}}\right\}}$.

(d) Puisque $\mathrm{Sp}(H_n(a)) \subset \mathbb{R}_-^*$, $\boxed{f_n \text{ admet un maximum local en } a.}$

(e) Comme a est un maximum local, il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathscr{B}(a,r), \quad f_n(x) \leq f_n(a).$$

Notons d'autre part que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $f_n(-x) = -f_n(x)$. On obtient donc que pour tout $x \in \mathscr{B}(b,r)$, $-x$ appartient à $\mathscr{B}(a,r)$ et on a :

$$f(-x) \leq f(a) = f(-b) \quad \Rightarrow \quad -f(x) \leq -f(b) \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(b).$$

Ainsi $\boxed{f \text{ admet un minimum local en } b.}$

Autre méthode. On peut aussi observer que $H_n(b) = -H_n(a)$. Donc les valeurs propres de $H_n(b)$ sont toutes positives, et on retrouve que f_n admet un minimum local en b.

5. (a) La fonction h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions qui le sont, et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad h'(t) = e^{-t^2}(1-2t^2).$$

On a $h(t) \geq 0$ si et seulement si $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. On obtient le tableau de variations suivant :

t	0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$	0

On a $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) \underset{u=t^2}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} u^{1/2}e^{-u} = 0$ par croissance comparée. et $h(1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2e}$.

(b) Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, on a :

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

D'où en élevant au carré :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \times y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right).$$

Étant donné l'inégalité demandée, prenons $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$. On obtient :

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right).}$$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &= \left|\sum_{k=1}^n x_k\right| \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \\
&\leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \qquad \text{d'après la question précédente} \\
&= \sqrt{n} \cdot h\left(\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\right) \leq \sqrt{n} \cdot h(1/\sqrt{2}) = \sqrt{\frac{n}{2e}}
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f_n(b) = -\sqrt{\frac{n}{2e}} \leq f_n(x) \leq \sqrt{\frac{n}{2e}} = f_n(a).$$

Donc $\boxed{f_n \text{ admet un minimum global en } b \text{ et un maximum global en } a.}$

6. (a) Rappelons que $H_n(a) = -\sqrt{\frac{2}{ne}}(nI_n + J_n)$, que la commande `eye(n,m)` crée la matrice identité de taille $n \times m$ (éventuellement complétée par des lignes ou des colonnes de 0 si $n \neq m$), et que la commande `ones(n,m)` crée une matrice de taille $n \times m$ ne contenant que des 1. On propose le script suivant.

```
n = input('Entrer n')
H = sqrt(2/(n*%e))*(n*eye(n,n)+ones(n,n))
disp(H)
```

(b) La nappe tracée correspond à une fonction qui possède un maximum local (qui est probablement global, même si on ne connait le graphe de la fonction que localement) et un minimum local. De plus, le maximum local est atteint en un point dont les deux coordonnées sont positives, qui pourrait donc être $a = (1/2, 1/2)$, et de même le minimum local semble atteint en un point qui pourrait être $b = -a$. Notons enfin qu'on a bien graphiquement la symétrie donnée par l'égalité $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. Avec les informations dont on dispose, on peut donc dire qu'$\boxed{\text{il est plausible que la nappe soit une représentation de la fonction } f_2.}$

Exercice 2

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.
On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, a[$.
On pose $Z = |X - Y|$ et on admet que $-Y$, $X - Y$ et Z sont des variables aléatoires à densité, elles aussi définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. (a) Déterminer une densité de $-Y$.
   (b) En déduire que la variable aléatoire $X - Y$ admet pour densité la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{a - |x|}{a^2} & \text{si } \ x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   On note G la fonction de répartition de $X - Y$.

2. (a) Exprimer la fonction de répartition H de la variable Z en fonction de G.
   (b) En déduire qu'une densité de Z est la fonction h définie par $h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a - x)}{a^2} & \text{si } \ x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3. Montrer que Z possède une espérance et une variance et les déterminer.

4. Écrire une fonction `Scilab` simulant la variable Z.

Exercice 3 (Edhec 2010)

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$F_{-Y}(x) = P(-Y \leq x) = P(Y \geq -x) = 1 - P(Y < -x) \overset{Y \text{ cont.}}{=} 1 - P(Y \leq -x) = 1 - F_Y(-x).$$

   Or on a pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$F_Y(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ \dfrac{u}{a} & \text{si } 0 \leq u \leq a \\ 1 & \text{si } u > a \end{cases}.$$

   D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_Y(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ -x < 0 \\ \dfrac{-x}{a} & \text{si } 0 \leq -x \leq a \\ 1 & \text{si } \ -x > a \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{x}{a} & \text{si } \ -a \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x < -a \end{cases}.$$

   En substituant dans notre calcul, on a que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{-Y}(x) = \begin{cases} 1 - 0 & \text{si } \ x > 0 \\ 1 + \frac{x}{a} & \text{si } \ x \in [-a, 0] \\ 1 - 1 & \text{si } \ x < -a \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x > 0 \\ \frac{x - (-a)}{0 - (-a)} & \text{si } \ x \in [-a, 0] \\ 0 & \text{si } \ x > 0 \end{cases}.$$

On obtient que $-Y$ suit une loi $\mathscr{U}([-a,0])$. C'est en particulier une variable à densité, une densité de $-Y$ étant donnée par $\boxed{f_{-Y} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [-a,0] \\ \frac{1}{a} & \text{si } t \in [-a,0] \end{cases}}$.

Autre méthode. $Z = -Y$ est une fonction affine d'une variable à densité (de la forme $Z = aY + b$). Par le cours, on sait qu'une telle variable est à densité, et qu'une densité de Z est donnée par la formule :

$$f_Z : t \mapsto \frac{1}{|a|} f_Y\left(\frac{t-b}{a}\right) = f_Y(-t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -t \notin [0,a] \\ 1 & \text{si } -t \in [0,a] \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [-a,0] \\ \frac{1}{a} & \text{si } t \in [-a,0] \end{cases}.$$

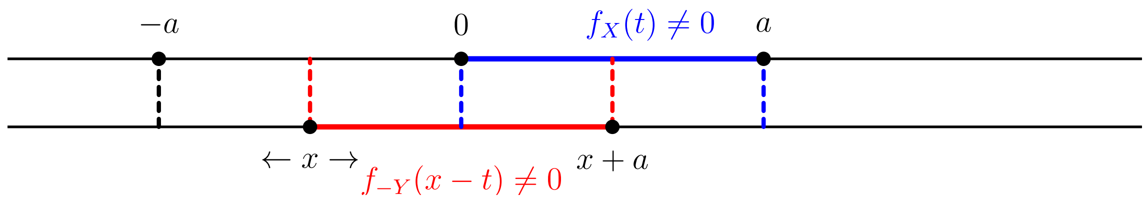
(b) Comme X et Y sont indépendantes, il en est de même de X et $-Y$ par lemme de coalition. De plus la densité de $-Y$ (ou celle de X) est bornée. Par le théorème du cours, $X - Y$ est donc une variable à densité, de densité définie (et continue) sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_{-Y}(x-t)\,\mathrm{d}t$$

On a :

$$f_{-Y}(x-t) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad -a \leq x - t \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq t \leq x + a.$$

On obtient le diagramme suivant :



On a alors quatre cas à considérer :

- si $x \leq -a$, alors $f_X(t) f_{-Y}(x-t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc $g(x) = 0$.
- si $-a < x \leq 0$, alors $f_X(t) f_{-Y}(x-t) \neq 0$ si et seulement si $t \in [0, x+a[$ (c'est la situation qui est représentée ci-dessus). D'où :
$$g(x) = \int_0^{x+a} f_X(t) f_{-Y}(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x+a} \frac{1}{a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{x+a}{a^2}.$$
- si $0 \leq x < a$, alors $f_X(t) f_{-Y}(x-t) \neq 0$ si et seulement si $t \in [x, a[$, et on a :
$$g(x) = \int_x^a f_X(t) f_{-Y}(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_x^a \frac{1}{a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{a-x}{a^2}.$$
- si $x \geq a$, alors $f_X(t) f_{-Y}(x-t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et alors $g(x) = 0$.

Finalement, on obtient que $\boxed{g : x \mapsto \begin{cases} \frac{a-|x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a,a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ est une densité de } X - Y}$.

2. (a) On a $(X-Y)(\Omega) = [-a,a]$ à partir de la densité g. On en déduit que $Z(\Omega) = [0,a]$. En particulier, on a $H(x) = 0$ pour tout $x < 0$ et $H(x) = 1$ pour tout $x > a$. Soit à présent $x \in [0,a]$. On a :

$$\begin{aligned} H(x) &= P(Z \leq x) = P(|X-Y| \leq x) = P(-x \leq X - Y \leq x) \\ &= P(X - Y \leq x) - P(X - Y < -x) = G(x) - G(-x) \end{aligned}$$

car $X - Y$ est une variable à densité. On obtient donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ G(x) - G(-x) & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}}$$

(b) On admet que Z est une variable aléatoire à densité (ce qu'on aurait d'ailleurs pu démontrer en vérifiant que H est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points 0 et a). On obtient en dérivant que pour tout $x \neq 0, a$:

$$H'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < 0 \\ g(x) + g(-x) & \text{si } \ x \in]0, a[\\ 0 & \text{si } \ x > a \end{cases}.$$

Ainsi une densité de Z est donnée par (en fixant arbitrairement les valeurs en 0 et a) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < 0 \\ 2\frac{a-|x|}{a^2} & \text{si } \ x \in [0, a] \\ 0 & \text{si } \ x > a \end{cases}$$

Comme $x \in [0, a]$ est positif, on en conclut que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ h(x) = \begin{cases} \frac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } \ x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Z admet un moment d'ordre k si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{2t^k(a-t)}{a^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument. Or c'est l'intégrale d'une fonction continue sur $[0, a]$, donc elle converge bien absolument. Ainsi Z admet un moment à tous les ordres. En particulier, Z admet une espérance et une variance. De plus on a :

$$\begin{aligned} E(Z^k) &= \int_0^a x^k h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{a^2}\int_0^a \left[ax^k - x^{k+1}\right]\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{a^2}\left[\frac{ax^{k+1}}{k+1} - \frac{x^{k+2}}{k+2}\right]_0^a = \frac{2}{a^2}\left[\frac{a^{k+2}}{k+1} - \frac{a^{k+2}}{k+2}\right] = \frac{2a^k}{(k+1)(k+2)} \\ V(Z) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2a^2}{12} - \left(\frac{2a}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{9} \end{aligned}$$

On obtient donc $\boxed{E(Z) = \frac{a}{3}}$ et $\boxed{V(Z) = \frac{a^2}{18}}$.

4.
```
function z=simulation(a)
    x=a*rand();
    y=a*rand();
    z=abs(x-y)
endfunction
```

Exercice 4 (Edhec 2019)

1. (a) On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 3A - 2I.$$

$\boxed{P(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2) \text{ est un polynôme de degré 2 annulateur de } A.}$

(b) Par le cours, on a $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\}$, soit ici $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1, 2\}$.

$\boxed{\text{Les valeurs propres possibles de } A \text{ sont } \lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = 2.}$

(c) Rappelons que les valeurs propres de f sont égales à celles de A. De plus avec le théorème du rang, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\dim E_\lambda = 3 - \mathrm{rg}(A - \lambda I_3).$$

$\boxed{\text{On peut conjecturer que 1 et 2 sont valeurs propres de } f \text{ et que } \dim E_1 = 2 \text{ et } \dim E_2 = 1.}$

(d) On a :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0_{3,1} \Leftrightarrow -x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

L'espace propre associé à la valeur propre 1 est donc $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Ces **deux** vecteurs ne sont pas colinéaires et forment une famille libre. Ainsi, on a bien $\boxed{1 \in \text{Sp}(f) \text{ et } ((1,1,0),(1,0,-1)) \text{ est une base de } \text{Ker}(f - Id).}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow (A - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_2 & = 2x_3 \end{cases}.$$

On obtient que $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Ainsi $\boxed{2 \text{ est valeur propre de } f \text{ et } ((0,2,1)) \text{ est une base de } \text{Ker}(f - 2Id).}$

2. (a) Par la question 1., les valeurs propres de f sont 1 et 2, et la somme des dimensions des espaces propres de f vaut 3, soit $\dim \mathbb{R}^3$. f est donc diagonalisable et on a :

$$\text{Ker}(f - Id) \oplus \text{Ker}(f - 2Id) = \mathbb{R}^3.$$

La concaténation de bases de chacun des espaces propres est une base de $\mathbb{R}^3$.

Pour respecter les conditions imposées, changeons la base trouvée pour $E_1(A)$.

$$\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

et la famille en jeu est encore libre (car **deux** vecteurs non colinéaires). Prenons donc :

$$\boxed{u_1 = (1,1,0), \quad v_1 = (0,1,1), \quad v_2 = (0,1,2)}$$

(u_1, v_1) est une base de $\text{Ker}(f - Id)$ et v_2 est une base de $\text{Ker}(f - 2Id)$. Leur concaténation (u_1, v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) On résout le système :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = a \\ \alpha + \lambda + 2\gamma = b \\ \lambda + \gamma = c \end{cases}.$$

On trouve en résolvant ce système :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a - b + 2c) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-a + b - c) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{x = (a,b,c) \text{ a pour coordonnées } (a, a - b + 2c, -a + b - c) \text{ dans la base } (u_1, v_1, v_2).}$

3. (a) Posons $P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\dots(X - \lambda_p) = a_p X^p + \dots + a_1 X + a_0$. On cherche à calculer $P(D)$. Comme D est une matrice diagonale, de coefficients diagonaux $d_{1,1}, \dots, d_{n,n}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$D^k = \begin{pmatrix} d_{1,1}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{2,2}^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{n,n}^k \end{pmatrix}.$$

Par règles de calcul matriciel, pour $a_0, a_1, \dots, a_p$ réels, on obtient :

$$a_0 I + a_1 D + \dots + a_p D^p = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{p} a_k d_{1,1}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{p} a_k d_{2,2}^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{k=0}^{p} a_k d_{n,n}^k \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que $P(D) = \begin{pmatrix} P(d_{1,1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(d_{2,2}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(d_{n,n}) \end{pmatrix}$.

La matrice diagonale D est une matrice qui comporte sur sa diagonale les valeurs propres de f. Donc on a pour tout i, $d_{i,i} \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ et tous les coefficients diagonaux de D sont des racines de P. Finalement, on obtient bien :

$$\boxed{(D - \lambda_1 I_n)(D - \lambda_2 I_n) \dots (D - \lambda_p I_n) = P(D) = 0_n}$$

(b) Le polynôme P présenté en question précédente est donc annulateur de D, de sorte que :

$$0_n = P(M_{\mathscr{B}}(f)) \underset{\text{cours}}{=} M_{\mathscr{B}}(P(f)) \text{ et donc } P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

$\boxed{(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_p) \text{ est un polynôme annulateur de } f.}$

4. (a) Pour k fixé dans $[\![1, p]\!]$, les racines de L_k sont $1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, p$ (on les a facilement car L_k est sous forme factorisée). On a donc pour $i \in [\![1, p]\!]$, $i \neq k$, $L_k(\lambda_i) = 0$. D'autre part, on a par produit de termes valant tous 1 que :$L_k(\lambda_k) = 1$. On peut donc conclure que :

$$\boxed{L_k(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}}$$

> **Déjà vu ?**
> On reconnait ici les polynômes de Lagrange associés aux réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ deux à deux distincts.

(b)
- Le degré de chaque polynôme L_k est $p-1$, donc la famille $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ est bien une famille de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.
- Montrons que cette famille est libre. Soient $a_1, a_2, \dots, a_p$ des réels tels que $a_1 L_1 + a_2 L_2 + \dots + a_p L_p = 0$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x) + \dots + a_p L_p(x) = 0.$$

En évaluant en $x = \lambda_i$ et en utilisant a., on trouve $a_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Ainsi la famille $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ est libre.
- $\operatorname{Card}(L_1, L_2, \dots, L_p) = p = \dim \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Par ces trois points, $\boxed{(L_1, L_2, \dots, L_p) \text{ est une base de } \mathbb{R}_{p-1}[X].}$

(c) Soit $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$. En utilisant la base précédente, il existe des réels $a_1, a_2, \dots, a_p$ tels que :

$$P = a_1 L_1 + a_2 L_2 + \dots + a_p L_p.$$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x) + \dots + a_p L_p(x).$$

En évaluant en $x=\lambda_i$ et en utilisant a., on trouve $P(\lambda_i)=a_i$. Ainsi on a que :

$$\boxed{\forall P\in\mathbb{R}_{p-1}[X],\quad P=\sum_{i=1}^{p}P(\lambda_i)L_i}$$

(d) On applique la question précédente au polynôme constant égal à 1, qui appartient à $\mathbb{R}_{p-1}[X]$:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p}L_i=1.}$$

5. (a) Soit $x\in E$.

$$\begin{aligned}(f-\lambda_k Id)(L_k(f)(x)) &= ((f-\lambda_k Id)\circ L_k(f))(x)\\ &= c_k((f-\lambda_k Id)\circ Q(f))(x)\end{aligned}$$

$$\text{où } c_k=\prod_{j\in[\![1,p]\!],\ j\neq k}\frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}\text{et où } Q=\prod_{j\in[\![1,p]\!],\ j\neq k}(X-\lambda_j)$$

$$\begin{aligned}(f-\lambda_k Id)(L_k(f)(x)) &= c_k((X-\lambda_k)\times Q)(f)(x)=c_kP(f)(x)\\ &= 0 \text{ par 3.b.}\end{aligned}$$

Donc on a $\boxed{\text{pour tout } x\in E,\ L_k(f)(x)\in\operatorname{Ker}(f-\lambda_k Id).}$

(b) Par 4.d. en l'endomorphisme f, on a $\sum\limits_{i=1}^{p}L_i(f)=Id$.

Soit $x\in E$. On applique l'endomorphisme précédent en x :

$$x=Id(x)=\sum_{i=1}^{p}L_i(f)(x)$$

Par la question précédente, pour tout i, $L_i(f)(x)\in\operatorname{Ker}(f-\lambda_i Id)$. Ce qui précède constitue donc la décomposition d'un vecteur x de E dans la somme directe $\bigoplus\limits_{i=1}^{p}\operatorname{Ker}(f-\lambda_i Id)$.

6. Ici $p=2$, il y a deux polynômes : $L_1=\frac{X-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}=2-X$ et $L_2=\frac{X-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}=X-1$. Soit $x=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Par 5., on a :

$$x=(2Id-f)(x)+(f(x)-x)$$

On a :

$$\begin{aligned}(2I-A)X &= \begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&2\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2a-b+2c\\a-b+2c\end{pmatrix}\\ &= a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+(a-b+2c)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\\ \text{et } (A-I)X &= \begin{pmatrix}0&0&0\\-2&2&-2\\-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=(-a+b-c)\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{On retrouve bien } x=au_1+(a-b+2c)v_1+(-a+b-c)v_2.}$

Problème (Edhec 2018)

Partie I : simulations de S_k et T_k.

1. Étant donné la structure du programme (tant que $c < k$, $n = n+1$), on observe que n correspond au nombre de lancers de la pièce, et que c représente le nombre de piles obtenus lors de ces n lancers. Le paramètre c augmente de 1 lorsqu'on la pièce tombe sur pile, ce qui survient avec une probabilité p. Il nous faut donc une instruction qui a une probabilité p de se réaliser, et alors on augmentera c de 1, et $1-p$ d'échouer, et c restera alors inchangé. Une manière de le faire est d'utiliser l'instruction `rand()<p` dans la boucle `if`. En effet `rand()` renvoie une réalisation d'une variable suivant une loi $\mathscr{U}([0,1])$. Cette réalisation est donc $\leq p$ avec une probabilité p, ce qui correspond bien à la probabilité d'obtenir un pile avec la pièce au n-ième lancer.

   La boucle `while` s'arrête lorsque le compteur c est égal à k, ce qui correspond à obtenir k piles. La variable n contient alors le nombre de lancers nécessaires à l'obtention des k piles, ce qui correspond à une réalisation de S_k.

   On obtient donc le code suivant :

```
k = input('donnez une valeur pour k :')
p = input('donnez une valeur pour p :')
n = 0
c = 0
while c<k
    n=n+1
    if rand()<=p then c = c+1
    end
end
disp(n)
```

2. De même, n représente le nombre de lancers. Mais ici, la variable c doit contenir le nombre de piles **consécutifs**, et on s'arrête lorsqu'on a obtenu k piles consécutifs, c'est-à-dire lorsque $c = k$, pour renvoyer n encore. On doit donc augmenter c de 1 lorsqu'on obtient un pile, ce qu'on simulera encore par `rand()<=p`. Si par contre on obtient un face, ce qui correspondra au cas où `rand()<=p` n'est pas réalisé, alors on remet le compteur c à 0 (la série de piles obtenue étant de longueur $< k$). On obtient donc le code suivant :

```
    if rand()<=p then c = c+1, else c=0
```

Partie 2 : calcul de l'espérance S_k.

3. S_1 correspond au rang du premier pile dans une succession de lancers. C'est donc le rang du premier succès (« obtenir pile »), avec probabilité de succès p, dans une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Ainsi $\boxed{S_1 \text{ suit une loi } \mathscr{G}(p)}$. En particulier $E(S_1)$ existe et vaut $\boxed{E(S_1) = \frac{1}{p}}$.

4. (a) X_{n-1} est égal au nombre de piles obtenus lors des $n-1$ premiers lancers. Il s'agit donc du nombre de succès lors de $n-1$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes avec probabilité de succès p. Donc $\boxed{X_{n-1} \text{ suit une loi } \mathscr{B}(n-1,p).}$

(b) S_k est le rang d'apparition du k-ème pile. Pour cela, on doit donc avoir lancer au moins k fois la pièce. Ainsi $S_k \geq k$. De plus pour tout $n \geq k$, l'évènement $[S_k = n]$ est bien réalisable puisqu'on peut obtenir $n-k$ « faces » suivis de k « piles ». Ainsi on a $\boxed{S_k(\Omega) = [\![k, +\infty[\![= \{n \in \mathbb{N},\ n \geq k\}}$.

L'évènement $[S_k = n]$ est réalisé si et seulement si on obtient le k-ème « pile » au n-ème lancer, soit si et seulement si on a obtenu $k-1$ « pile » parmi des $n-1$ premiers lancers et pile lors du n-ème lancer. Ainsi on a :

$$\boxed{[S_k = n] = [X_{n-1} = k-1] \bigcap P_n.}$$

(c) Les évènements $[X_{n-1} = k-1]$ et P_n étant indépendants, puisque les lancers le sont, on a :

$$P(S_k = n) = P([X_{n-1} = k-1] \bigcap P_n) = P(X_{n-1} = k-1)P(P_n) = \left(\binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}\right) p$$

car $X_{n-1} \hookrightarrow \mathscr{B}(n-1, p)$. On obtient donc que :

$$\boxed{\forall n \geq k, \quad P(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.}$$

5. (a) Z_i représente le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du i-ème « pile » après l'obtention du $(i-1)$-ème « pile ». Il s'agit donc du nombre de lancers nécessaires à l'obtention d'un pile. Les lancers étant indépendants, $\boxed{Z_i \text{ suit donc une loi } \mathscr{G}(p).}$

Cette justification conviendrait très bien lors du concours. En détail, au cas où l'argument précédent ne vous convainc pas totalement, on peut aussi le retrouver par le calcul suivant : on applique la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $([S_{i-1} = n])_{n \geq i-1}$. On obtient que pour tout $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
P(Z_i = k) &= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(Z_i = k,\ S_{i-1} = n) = \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(S_i = k+n,\ S_{i-1} = n) \\
&= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P([S_{i-1} = n] \cap F_{n+1} \cap \dots \cap F_{n+k-1} \cap P_{n+k}) \\
&= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(S_{i-1} = n)P(F_{n+1}) \dots P(F_{n+k-1})P(P_{n+k}) \quad \text{par indépendance des lancers} \\
&= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(S_{i-1} = n)(1-p)^{k-1}p = (1-p)^{k-1}p \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(S_{i-1} = n) = (1-p)^{k-1}p
\end{aligned}$$

On retrouve bien que $Z_i \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

(b) On a :

$$S_k = (S_k - S_{k-1}) + (S_{k-1} - S_{k-2}) + \dots + (S_2 - S_1) + S_1 \boxed{= Z_k + Z_{k-1} + \dots + D_2 + D_1.}$$

(c) Puisque pour tout $1 \leq i \leq k$, Z_i possède une espérance qui vaut $\frac{1}{p}$, on en déduit par linéarité de l'espérance que $E(S_k)$ existe aussi et vaut :

$$E(S_k) = \sum_{i=1}^{k} E(Z_k) \boxed{= \frac{k}{p}.}$$

6. (a) Les Z_i admettent toutes une même espérance $\dfrac{1}{p}$ et une même variance. De plus elles sont indépendantes (admis dans l'énoncé). Par la loi faible des grands nombres, on peut donc conclure que $\boxed{\overline{Z_k} \text{ converge en probabilité vers } \dfrac{1}{p}.}$

(b) La fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a $\dfrac{1}{p} \in \mathbb{R}_+^*$. Par la propriété admise dans l'énoncé (qui généralise l'une des propriétés du cours), on obtient que $\dfrac{1}{\overline{Z_k}} = \dfrac{k}{S_k} \xrightarrow{P} p$.

$\boxed{\dfrac{k}{S_k} \text{ est donc un estimateur convergent de } p.}$

(c) Puisque $\{[S_{k-1} = j],\ j \geq k-1\}$ est un SCE, la série $\sum\limits_{j \geq k-1} P(S_{k-1} = j)$ converge et sa somme vaut $\boxed{\sum\limits_{j=k-1}^{+\infty} P(S_{k-1} = j) = 1.}$

Par le théorème de transfert, la variable aléatoire $\dfrac{k-1}{S_k - 1}$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{j \in S_k(\Omega)} \dfrac{k-1}{j-1} P(S_k = j) = \sum\limits_{j \geq k} \dfrac{k-1}{j-1} \dbinom{j-1}{k-1} p^k q^{j-k}$ converge absolument. Puisque cette série est à termes positifs, on étudie sa convergence. On a (en utilisant la formule de Pascal et le fait que $k \geq 2$) :

$$\begin{aligned}\frac{k-1}{j-1}\binom{j-1}{k-1}p^k q^{j-k} = \binom{j-2}{k-2}p^k q^{j-k} &= p\binom{j-2}{k-2}p^{k-1}q^{(j-1)-(k-1)} \\ &= pP(S_{k-1} = j-1)\end{aligned}$$

Il s'agit du terme général d'une série convergente, donc $\boxed{\dfrac{k-1}{S_k-1} \text{ admet bien une espérance}}$ et on a :

$$E\left(\frac{k-1}{S_k-1}\right) = p\sum_{j=k}^{+\infty} P(S_{k-1} = j-1) = p\sum_{j=k-1}^{+\infty} P(S_{k-1} = j) \boxed{= p.}$$

D'où le résultat souhaité.

(d) On a :

$$\begin{aligned}E\left(\frac{k}{S_k}\right) - p = E\left(\frac{k}{S_k}\right) - E\left(\frac{k-1}{S_k-1}\right) &= E\left(\frac{k(S_k-1)-(k-1)S_k}{S_k(S_k-1)}\right) \\ &= E\left(\frac{S_k - k}{S_k(S_k-1)}\right)\end{aligned}$$

Or on a $S_k \geq k$, donc $T_k = \dfrac{S_k - k}{S_k(S_k-1)} \geq 0$. De plus par le calcul précédent, T_k admet une espérance, et par le théorème de transfert :

$$E(T_k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n-k}{n(n-1)} P(S_k = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n-k}{n(n-1)} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} > 0.$$

Ainsi $b_\theta\left(\dfrac{k}{S_k}\right) > 0$, et $\boxed{\dfrac{k}{S_k} \text{ est un estimateur biaisé de } p.}$

Partie 3 : calcul de l'espérance de T_k.

7. S_1 désigne le rang d'apparition du premier « pile », alors que T_1 désigne le dernier « pile » de la première série de 1 « pile ». Ainsi on a $\boxed{S_1 = T_1}$.

8. (a) Pour tout $1 \leq j \leq k$, on a :

$$P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_{j-1} \cap F_j = [W = j]$$

et

$$P_1 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap P_k = [W \geq k+1].$$

Or $\{[W=j],\ 1 \leq j \leq k\} \cup \{[W \geq k+1]\}$ est un système complet d'évènements puisque $W(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (W suit une loi $\mathscr{G}(1-p)$). D'où le résultat.

(b) Rappelons que T_k est le rang d'apparition du dernier pile de la première série de k piles consécutifs. Supposons qu'on ait fait « face » au premier lancer. Ce lancer ne contribue pas à une série de « pile ». Ainsi pour obtenir pour la première fois une série de k « pile » consécutifs au n-ème lancer, il faudra donc obtenir cette série pour la première fois au bout de $n-1$ lancers (entre le deuxième lancer et le n-ème lancer). Or la probabilité d'obtenir k « pile » consécutifs pour la première fois au $(n-1)$-ème lancer est précisément $P(T_k = n-1)$. On a donc :

$$\boxed{\forall n \geq k, \quad P_{F_1}(T_k = n) = P(T_k = n-1).}$$

On admet que T_k admet une espérance, de sorte que toutes les espérances conditionnelles considérées existent bien aussi. Notons de plus que $T_k(\Omega) = [\![k, +\infty[\![$ (même argument que pour $S_k(\Omega)$). On a :

$$\begin{aligned}
E(T_k|F_1) &= \sum_{n=k}^{+\infty} nP_{F_1}(T_k = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} nP(T_k = n-1) \\
&= \underbrace{kP(T_k = k-1)}_{=0} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} nP(T_k = n-1) = \sum_{n=k}^{+\infty} (n+1)P(T_k = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} nP(T_k = n) + \sum_{n=k}^{+\infty} P(T_k = n) \qquad \text{car toutes les séries convergent} \\
&\boxed{= E(T_k) + 1}
\end{aligned}$$

car $\{[T_k = n],\ n \geq k\}$ est un SCE. D'où le résultat voulu.

(c) Soit $i \in [\![2, k]\!]$. De la même façon si $P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i$ est réalisé, les i-premiers lancers ne contribuent pas à la constitution d'une série de k-lancers. Ainsi la probabilité d'obtenir pour la première fois k « piles » consécutifs au n-ème lancer sachant $P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i$ réalisé est égal à la probabilité d'obtenir pour la première fois k « piles » consécutifs en exactement $n-i$ lancers (du $(i+1)$-ème lancer au n-ème). Ainsi on a :

$$\forall n \geq k, \quad P_{P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i}(T_k = n) = P(T_k = n-i).$$

Notons d'ailleurs que $P(T_k = n-i) = 0$ si $n - i < k$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
E(T_k|P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i) &= \sum_{n=k}^{+\infty} nP_{P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i}(T_k = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} nP(T_k = n-i) \\
&= \sum_{n=k+i}^{+\infty} nP(T_k = n-i) = \sum_{n=k}^{+\infty} (n+i)P(T_k = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} nP(T_k = n) + i\sum_{n=k}^{+\infty} P(T_k = n) \qquad \text{car toutes les séries convergent} \\
&= E(T_n) + i.
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{on a } E(T_k|P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i) = E(T_n) + i \text{ pour tout } i \in [\![2, k]\!].}$

(d) Si l'évènement $P_1 \cap \cdots \cap P_k$ est réalisé, alors on a obtenu une succession de k « pile » consécutifs lors des k premiers lancers, et donc $T_k = k$. Ainsi la loi conditionnelle de T_k sachant l'évènement $P_1 \cap \cdots \cap P_k$ est la loi certaine égale à k. On obtient donc que :

$$E(T_k|P_1 \cap \cdots \cap P_k) = E(k|P_1 \cap \cdots \cap P_k) \boxed{= k.}$$

9. (a) D'après la formule de l'espérance totale appliquée au système complet d'évènements de la question 8.(a), on a (en admettant que $E(T_k)$ existe) :

$$\begin{aligned}E(T_k) &= \left(\sum_{i=1}^{k} E(T_k|P_1\cap\cdots\cap P_{i-1}\cap F_i)P(P_1\cap\cdots\cap P_{i-1}\cap F_i)\right)\\ &\quad + E(T_k|P_1\cap\cdots\cap P_k)P(P_1\cap\cdots\cap P_k)\\ &= \left(\sum_{i=1}^{k}(E(T_k)+i)p^{i-1}(1-p)\right)+kp^k\\ &= E(T_k)\sum_{i=1}^{k}p^{i-1}(1-p)+\sum_{i=1}^{k}ip^{i-1}(1-p)+kp^k\\ &\boxed{= E(T_k)\sum_{j=0}^{k-1}p^jq+\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)p^j(1-p)+kp^k}\end{aligned}$$

D'où le résultat voulu.

(b) On a (somme des termes d'une progression géométrique de raison $p\neq 1$) :

$$\sum_{j=0}^{k-1}p^jq = q\frac{1-p^k}{1-p} = 1-p^k.$$

Il faut à présent calculer $\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)p^j$. On reconnait ici la « dérivée » de la somme d'une suite géométrique. Soit donc $x\in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{i=0}^{k}x^i = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}.$$

D'où en dérivant par rapport à x (possible car tout est dérivable), on a :

$$\sum_{i=1}^{k}ix^{i-1} = \frac{-(k+1)x^k(1-x)+(1-x^{k+1})}{(1-x)^2} = \frac{1-(k+1)x^k+kx^{k+1}}{(1-x)^2}.$$

D'où pour $x=p$, on a :

$$\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)p^j = \frac{1-(k+1)p^k+kp^{k+1}}{(1-p)^2}.$$

On obtient alors en substituant dans l'expression de la question précédente :

$$E(T_k) = E(T_k)(1-p^k)+\frac{1-(k+1)p^k+kp^{k+1}}{(1-p)}+kp^k$$

soit encore :

$$E(T_k)p^k = \frac{1-(k+1)p^k+kp^{k+1}+kp^k-kp^{k+1}}{(1-p)}$$

D'où finalement le résultat voulu :

$$\boxed{E(T_k) = \frac{1-p^k}{qp^k}.}$$

10. Lorsque la première série de k « piles » consécutifs s'achève, alors on a déjà obtenu au minimum k « piles », et donc $S_k\leq T_k$. Par croissance de l'espérance, on obtient $\boxed{E(S_k)\leq E(T_k)}$. On en déduit avec les calculs précédents que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et tout $p\in]0,1[$:

$$\frac{k}{p}\leq\frac{1-p^k}{qp^k} \Leftrightarrow k(1-p)p^{k-1}\leq 1-p^k \Leftrightarrow kp^{k-1}-kp^k\leq 1-p^k \Leftrightarrow \boxed{kp^{k-1}-1\leq kp^k-p^k=(k-1)p^k.}$$

D'où le résultat.