DM14

Devoir maison de révisions type Edhec

Exercice 1

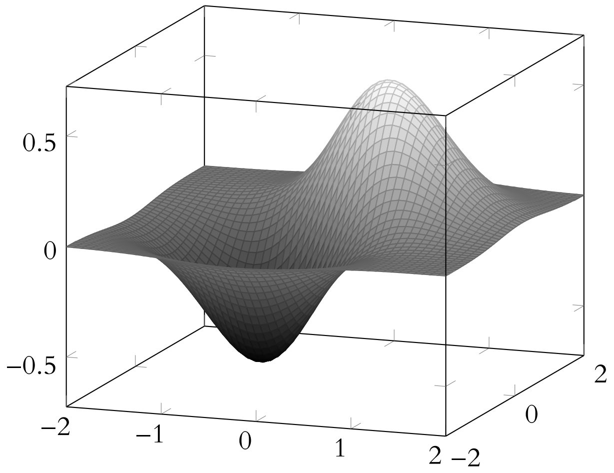
Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

1. (a) Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
   (b) Vérifier que le vecteur V_n élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, dont toutes les composantes sont égales à 1, est vecteur propre de J_n.
   (c) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n.

Dans toute la suite, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).$$

2. Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
3. (a) Montrer que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a : $\quad \partial_i(f_n)(x) = \left(1 - 2x_i \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$.
   (b) En déduire que f_n possède deux points critiques $a = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}(1, 1, \dots, 1)$ et $b = -a$.
4. (a) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f_n.
   (b) Vérifier que la hessienne de f_n en a est $H_n(a) = \dfrac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n)$.
   (c) À l'aide de la première question, donner les valeurs propres de $H_n(a)$.
   (d) En déduire que f_n possède un extremum local en a.
   (e) Sans refaire tous les calculs, donner une conclusion concernant le point critique b.
5. (a) Étudier la fonction h qui, à tout t de $\mathbb{R}_+$, associe $h(t) = te^{-t^2}$.
   (b) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique, montrer que :
   $$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$
   (c) Déduire des deux questions précédentes que f_n admet en a et en b des extrema globaux.
6. Question d'informatique.
   (a) Écrire des commandes `Scilab` permettant de calculer et d'afficher $H_n(a)$ pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.
   (b) Dans le cas $n = 2$, la nappe suivante est-elle acceptable en tant que représentation graphique de la fonction f_2 ? Justifier.



Exercice 2

Partie 1 : Étude d'un exemple.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.

   (b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).

   (c) En `Scilab`, la commande `r=rank(M)` renvoie dans la variable `r` le rang de la matrice M. On a saisi :

```
A=[1,0,0;-2,3,-2;-1,1,0]
r1=rank(A-eye(3,3))
r2=rank(A-2*eye(3,3))
disp(r1,'r1=')
disp(r2,'r2=')
```

   `Scilab` a renvoyé :

```
r1 =
     1.
r2 =
     2.
```

   Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés ?

   (d) Donner une base de chacun des noyaux $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id)$ et $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id)$.

2. (a) Justifier qu'il existe une base (u_1, v_1, v_2) de $\mathbb{R}^3$, où (u_1, v_1) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id)$ et (v_2) une base de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id)$. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.

   (b) On note $x = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de a, b et c les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2).

Partie 2 : Généralisation.

Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p \geq 2$, soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme diagonalisable de E ayant p valeurs propres, λ_1, λ_2, $\dots$, λ_p, deux à deux distinctes.

On se propose de déterminer la décomposition de chaque vecteur x de E sur la somme directe $\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(f - \lambda_k Id)$, où Id désigne l'endomorphisme identité de E.

3. Soit $\mathscr{B}$ une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D.
   (a) En notant I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :
   $$(D - \lambda_1 I_n)(D - \lambda_2 I_n)\dots(D - \lambda_p I_n) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.$$
   (b) En déduire un polynôme annulateur de f.

Pour chaque k de $[\![1, p]\!]$, on définit le polynôme $L_k = \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$.

4. (a) En distinguant les cas $i = k$ et $i \neq k$, calculer $L_k(\lambda_i)$.
   (b) Montrer que $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.
   (c) Établir alors que :
   $$\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X],\ P = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) L_k.$$
   (d) En déduire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{P} L_i = 1$.

5. (a) Montrer que, pour tout x de E, $L_k(f)(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(f - \lambda_k Id)$, où $L_k(f)(x)$ désigne l'image du vecteur x de E par l'endomorphisme $L_k(f)$.
   (b) En déduire la décomposition cherchée.

6. Vérifier que cette dernière décomposition redonne celle obtenue pour l'endomorphisme f de la partie 1, si l'on choisit $n = 3$, $E = \mathbb{R}^3$ et $p = 2$.

Problème.

On effectue des lancers d'une pièce donnant « Pile » avec la probabilité p, élément de $]0, 1[$, et donnant « Face » avec la probabilité $q = 1 - p$, les différents lancers étant supposés indépendants.
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (resp. F_k) l'événement : « la pièce donne pile (resp. face) au k-ème lancer », on note également S_k le rang du k-ème pile et T_k le rang d'apparition du dernier pile de la première série de k piles consécutifs. On suppose que S_k et T_k sont deux variables aléatoires toutes deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Par exemple, si les lancers donnent $F_1, P_2, F_3, P_4, F_5, P_6, P_7, P_8$, alors S_1 et T_1 prennent la valeur 2, S_2 prend la valeur 4, T_2 prend la valeur 7, S_3 prend la valeur 6, T_3 prend la valeur 8, S_4 prend la valeur 7 et S_5 prend la valeur 8.

Partie I : simulations de S_k et T_k.

1. Compléter les lignes 7 et 10 du script `Scilab` suivant pour qu'il affiche la valeur prise par S_k lorsque k et p sont entrés par l'utilisateur :

```
1  k = input('donnez une valeur pour k :')
2  p = input('donnez une valeur pour p :')
3  n = 0
4  c = 0
5  while c<k
6      n=n+1
7      if --- then c = c+1
8      end
9  end
10 disp(---)
```

2. On souhaite que le script précédent affiche la valeur prise par T_k. Remplacer la ligne 7 par la suivant, dûment complétée :

```
7      if --- then c = c+1, else ---
```

Partie 2 : calcul de l'espérance S_k.

3. Donner la loi de S_1 ainsi que son espérance.

4. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à k, on note X_{n-1} la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus lors des $n-1$ premiers lancers.

   (a) Donner la loi de X_{n-1}.

   (b) Donner $S_k(\Omega)$ puis écrire l'évènement $[S_k = n]$ à l'aide de la variable X_{n-1}.

   (c) En déduire que la loi de S_k est donnée par :
   $$\forall n \geq k,\ P(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.$$

5. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   On pose $Z_1 = S_1$ et, pour tout entier naturel i supérieur ou égal à 2, on pose $Z_i = S_i - S_{i-1}$.
   On admet que $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

   (a) Donner la loi des variables aléatoires Z_i.

   (b) Exprimer S_k à l'aide de certaines des variables Z_i.

   (c) En déduire que S_k possède une espérance et donner sa valeur.

6. Estimation.
   On suppose le paramètre p inconnu et on souhaite trouver un estimateur de p. On admet que, si une suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire Y, alors pour toute fonction f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $P(Y \in I) = 1$, la suite $(f(Y_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $f(Y)$.

   (a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on pose $\overline{Z_k} = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} Z_i$.

   Montrer que la suite $\left(\overline{Z_k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité.

   (b) En déduire que $\dfrac{k}{S_k}$ est un estimateur convergent de p.

(c) Donner sans calcul la valeur de $\displaystyle\sum_{j=k-1}^{+\infty} P(S_{k-1} = j)$. Monter alors que la variable aléatoire $\dfrac{k-1}{S_k - 1}$ possède une espérance et que l'on a : $E\left(\dfrac{k-1}{S_k-1}\right) = p$.

(d) En déduire que $\dfrac{k}{S_k}$ est un estimateur biaisé de p (on ne cherchera pas à calculer la valeur de ce biais).

Partie 3 : calcul de l'espérance de T_k.

7. Comparer les variables aléatoires S_1 et T_1.

8. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   On admet que T_k possède une espérance que l'on se propose de déterminer.

   (a) Justifier, en utilisant la variable aléatoire W égale au rang du premier face lors de l'expérience décrite au début de ce problème, que les évènements $F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2 \cap F_3, P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4, \ldots, P_1 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap F_k$ et $P_1 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap P_k$, forment un système complet d'évènements.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à k, on a $P_{F_1}(T_k = n) = P(T_k = n-1)$, puis en déduire que l'espérance conditionnelle $E(T_k|F_1)$ est égale à $1 + E(T_k)$.

   (c) De la même façon, déterminer, pour tout i de $[\![2, k]\!]$, la valeur de $E(T_k|P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i)$.

   (d) Justifier que $E(T_k|P_1 \cap \cdots \cap P_k) = k$.

9. (a) Déduire des questions précédentes, la relation :

$$E(T_k) = \sum_{j=0}^{k-1} (j+1)p^j q + E(T_k) \sum_{j=0}^{k-1} p^j q + kp^k.$$

   (b) Établir finalement que :

$$E(T_k) = \frac{1-p^k}{qp^k}.$$

10. Justifier que $E(S_k) \leq E(T_k)$ puis utiliser certains résultats des parties 2 et 3 pour établir, sans étude de fonction, que l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall p \in]0,1[, \quad (k-1)p^k \geq kp^{k-1} - 1.$$