DM15

# Devoir maison de révisions type EM Lyon

## Exercice 1 (EML 2017)
## Partie I : Étude d'un exemple.

On considère la matrice $A$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

1. La matrice $A$ est triangulaire supérieure, avec un 0 sur la diagonale. $\boxed{\text{Elle n'est donc pas inversible.}}$ De plus, sa première colonne $C_1(A)$ est nulle, tandis que $C_2(A)$ et $C_3(A)$ sont linéairement indépendantes. Donc $\boxed{A \text{ est de rang } 2.}$

2. La matrice $A$ étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont sur sa diagonale. Ainsi on a $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2, 6\}.}$ Elle admet donc 3 valeurs propres réelles distinctes et est de taille $3 \times 3$. $A$ est donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

3. Remarquons tout d'abord que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A$ pour la valeur propre 0, et comme $\dim(E_0(A)) = 1$, on a $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

   Déterminons $E_2(A)$. On a :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 2x \\ 2y - 4z = 2y \\ 6z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases}$$
   Ainsi on a $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

   Déterminons enfin $E_6(A)$. On a :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_6(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 6x \\ 2y - 4z = 6y \\ 6z = 6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -6x \\ z = -y = 6x \end{cases}$$
   Ainsi on a $E_6(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -6x \\ 6x \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$.

   Comme $A$ est diagonalisable, on a $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = E_0(A) \oplus E_2(A) \oplus E_6(A)$ et $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $A$. Soit $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathscr{B}$. $P$ est inversible, avec les coefficients de sa première ligne tous égaux à 1, et on a par formule de changement de bases :
$$\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = D.}$$

$D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est bien diagonale avec des coefficients diagonaux rangés dans l'ordre croissant, et on a bien $A = PDP^{-1}$. D'où le résultat souhaité.

## Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de polynômes.

4. Pour tout $P \in E$, on a $\deg(P) \leq n$. Donc $\deg(X(X-1)P') \leq n+1$, de sorte que $\deg(T(P)) = \deg((X(X-1)P')') \leq n$. Ainsi $T(P)$ appartient bien à $E$ pour tout $P \in E$.

   Montrons de plus que $T$ est linéaire. Soit pour cela $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in E$. On a :

$$\begin{aligned} T(\alpha P + \beta Q) &= (X(X-1)(\alpha P + \beta Q)')' \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= (X(X-1)(\alpha P' + \beta Q'))' = (\alpha X(X-1)P' + \beta X(X-1)Q'))' \\ &= \alpha(X(X-1)P')' + \beta(X(X-1)Q')' \quad \text{toujours par lin. de la dérivation} \\ &= \alpha T(P) + \beta T(Q) \end{aligned}$$

   D'où la linéarité. $\boxed{T \text{ donc un endomorphisme de } E.}$

5. On a $T(1) = 0$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ :

$$T(X^k) = (X(X-1)kX^{k-1})' = (kX^{k+1} - kX^k)' \boxed{= k(k+1)X^k - k^2X^{k-1}.}$$

   D'où la matrice $M$ de $T$ dans la base $\mathscr{B}$ :

$$\boxed{M = M_{\mathscr{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & -4 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & n(n-1) & -n^2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}}.$$

6. La matrice $M$ est triangulaire supérieure, avec un 0 sur la diagonale. Donc $M$ n'est pas inversible, et l'endomorphisme $\boxed{T \text{ n'est pas bijectif.}}$

   La première colonne $C_1(M)$ de $M$ est nulle, et les $n$ colonnes suivantes $C_2(M), \dots, C_{n+1}(M)$ forment une famille libre car elles sont échelonnées. Ainsi $\text{rg}(M) = n$, et on a donc $\boxed{\text{rg}(T) = n.}$

   Par le théorème du rang, on a :

$$\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(E) - \text{rg}(T) = n + 1 - n = 1.$$

   Et on a $T(1) = 0$. Ainsi $1 \in \text{Ker}(T)$ et est un vecteur non nul. $(1)$ est donc une base de $\text{Ker}(T)$, de sorte que $\boxed{\text{Ker}(T) = \text{Vect}(1).}$

7. La matrice $M$ étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres se trouvent sur la diagonale. On a donc :

$$\boxed{\text{Sp}(T) = \text{Sp}(M) = \{k(k+1),\ k \in [\![0, n]\!]\}.}$$

   Ces valeurs propres sont deux à deux distinctes (puisque l'application $x \mapsto x(x+1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc injective). L'endomorphisme $T$ admet donc $n + 1 = \dim(E)$ valeurs propres distinctes, $\boxed{T \text{ est donc diagonalisable.}}$ On peut même ajouter que tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

## Partie III : Intervention d'un produit scalaire.

8. Notons tout d'abord que pour tout $P, Q \in E$, l'intégrale $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$ converge bien car c'est l'intégrale d'une fonction continue (car polynomiale) sur un segment. Montrons que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$.

   - *Linéarité à gauche.* $\forall P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a :

   $$\begin{aligned}\varphi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q) &= \int_0^1 (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) Q(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda_1 \int_0^1 P_1(x)Q(x)\,\mathrm{d}x + \lambda_2 \int_0^1 P_2(x)Q(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \lambda_1 \varphi(P_1, Q) + \lambda_2 \varphi(P_2, Q)\end{aligned}$$

   - *Symétrie.*
   $$\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 Q(x)P(x)\,\mathrm{d}x = \langle Q, P\rangle.$$
   En particulier, on en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à droite.

   - *Positivité.*
   $$\langle P, P\rangle = \int_0^1 P(x)^2\,\mathrm{d}x.$$
   Or l'intégrale d'une fonction positive est positive. Donc $\varphi(P,P) \geq 0$.

   - *Défini positif.* Soit $P \in E$ tel que $\varphi(P,P) = 0$. On a :
   $$0 = \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x.$$
   La fonction $x \mapsto P(x)^2$ est **continue** et **positive** sur $[0,1]$. Son intégrale est donc nulle si et seulement si :
   $$\forall x \in [0,1], \quad P(x)^2 = 0 \Rightarrow \forall x \in [0,1], \quad P(x) = 0.$$
   Ainsi $P$ est un polynôme admettant une **infinité de racines** (tous les réels entre 0 et 1). C'est donc le polynôme nul. Donc $P = 0_E$ et $\varphi$ est défini positif.

   Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$

9. Comme souvent (toujours ?) dans cette situation, on va effectuer une intégration par parties. Pour tout $P, Q \in E$, on a :
   $$\varphi(T(P), Q) = \int_0^1 \left[x(x-1)P'(x)\right]'(x) Q(x)\,\mathrm{d}x.$$
   On a :
   $$\begin{array}{c|ccc} + & Q(x) & \searrow & [x(x-1)P'(x)]'(x) \\ - & Q'(x) & \overset{\int}{\leftarrow} & x(x-1)P'(x) \end{array}$$
   Les fonctions $x \mapsto Q(x)$ et $x \mapsto x(x-1)P'(x)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0,1]$. Par intégration par parties, on a :
   $$\varphi(T(P), Q) = \underbrace{\left[x(x-1)P'(x)Q(x)\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 x(x-1)P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}x \boxed{= -\int_0^1 x(x-1)P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}x.}$$

10. On a ainsi pour tout $P, Q \in E$ :

$$\varphi(T(P),Q) \overset{9.}{=} -\int_0^1 x(x-1)P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x(x-1)Q'(x)P'(x)\,\mathrm{d}x \overset{9.}{=} \varphi(T(Q),P) = \varphi(P,T(Q))$$

Donc $\boxed{T \text{ est un endomorphisme symétrique de } (E,\varphi.}$

On retrouve ainsi le résultat de la question 7. : $\boxed{T \text{ est diagonalisable.}}$

11. (a) Pour tout $P \in E$, on a :

$$\varphi(T(P),P) \overset{9.}{=} -\int_0^1 x(x-1)P'(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Comme $x \mapsto x(x-1)P'(x)^2$ est une fonction positive sur $[0,1]$, on a $\boxed{\varphi(T(P),P) \geq 0}$ par positivité de l'intégrale.

(b) Soit $P \in E$ tel que $\varphi(T(P),P) = 0$. On a :

$$0 = \varphi(T(P),P) \overset{9.}{=} -\int_0^1 x(x-1)P'(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Comme $x \mapsto x(x-1)P'(x)^2$ est une fonction **continue** et **positive** sur $[0,1]$, cette intégrale est nulle si et seulement si $x \mapsto x(x-1)P'(x)^2$ est la fonction nulle sur $[0,1]$. Ce qui équivaut à :

$$\forall x \in [0,1], \quad x(x-1)P'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in ]0,1[, \quad P'(x) = 0.$$

Le polynôme $P'$ admet donc une infinité de racines (tous les réels strictement compris entre 0 et 1). C'est donc le polynôme nul. Ainsi $P' = 0_E$, et $P$ est un polynôme constant. Et réciproquement, si $P = c \in \mathbb{R}$, on a bien :

$$\varphi(T(P),P) = \varphi(0_E,P) = 0.$$

Ainsi $\boxed{\text{l'ensemble des polynômes } P \text{ de } E \text{ tels que } \varphi(T(P),P) = 0 \text{ est } \{c,\ c \in \mathbb{R}\}.}$

## Partie IV : Retour sur l'exemple de la partie I.

12. Lorsque $n = 2$, on a :

$$\boxed{M = M_{\mathscr{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = A.}$$

13. On a montré à la partie I que $A$ est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(A) = \{0,2,6\}$ et que $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$,

$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $E_6(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$.

En utilisant la correspondance vectorielle/matricielle, on en déduit que $T$ est diagonalisable (ce qu'on savait), $\mathrm{Sp}(T) = \{0,2,6\}$ et que $E_0(T) = \mathrm{Vect}(1)$, $E_2(T) = \mathrm{Vect}(1-2X)$, $E_6(T) = \mathrm{Vect}(1-6X+6X^2)$. Comme de plus $T$ est symétrique, on sait par le cours que la famille $(1, 1-2X, 1-6X+6X^2)$ est orthogonale pour $\varphi$. Reste à normaliser chacun de ces vecteurs. On a :

$$\|1\|^2 = \int_0^1 1^2\,\mathrm{d}x = 1,$$

$$\|1-2X\|^2 = \int_0^1 (1-2x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1-4x+4x^2\,\mathrm{d}x = 1-2+\frac{4}{3} = \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned}\|1-6X+6X^2\|^2 &= \int_0^1 (1-6x+6x^2)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1+36x^2+36x^4-12x+12x^2-72x^3\,\mathrm{d}x\\ &= 1+\frac{36}{3}+\frac{36}{5}-\frac{12}{2}+\frac{12}{3}-\frac{72}{4} = 1+12+\frac{36}{5}-2-18 = \frac{36}{5}-7 = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

en utilisant pour ce dernier calcul l'identité :

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Ainsi $\boxed{\mathscr{C} = \left(1, \sqrt{3}(1-2X), \sqrt{5}(1-6X+6X^2)\right)}$ est une base orthonormée de $E$ pour le produit scalaire $\varphi$, formée de vecteurs propres de $T$ associés aux valeurs propres de $T$ dans l'ordre croissant.

14. On a :

$$M_{\mathscr{C}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{6}\end{pmatrix}^2.$$

Soit $V$ l'unique endomorphisme de $E$ tel que $M_{\mathscr{C}}(V) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{6}\end{pmatrix}$. On a donc :

$$M_{\mathscr{C}}(V\circ V) = M_{\mathscr{C}}(V)^2 = M_{\mathscr{C}}(T).$$

Ainsi on a $\boxed{V\circ V = T}$. La matrice de $V$ **dans la base orthonormée** $\mathscr{C}$ étant de plus symétrique, $\boxed{V \text{ est un endomorphisme symétrique de } (E,\varphi).}$

Enfin puisque $\mathscr{C}$ est une base orthonormée de $(E,\varphi)$, on a pour tout $P\in E$ (en notant $X = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ les coordonnées de $P$ dans la base $\mathscr{C}$) :

$$\varphi(V(P),P) = {}^t(M_{\mathscr{C}}(V)X)X = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}y & \sqrt{6}z\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \sqrt{2}y^2+\sqrt{6}z^2\ \boxed{\geq 0.}$$

---

## Exercice 2 (EML 2017)
## Partie I : Premières propriétés de la fonction $H$

1. On pose, pour tout $x\in I, f_x : t\mapsto \frac{1}{(1+t^2)^x} = \mathrm{e}^{-x\ln(1+t^2)}$ sur $\mathbb{R}^+$. Comme $t\mapsto 1+t^2$ est polynomiale strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, on peut composer par ln et $t\mapsto \ln(1+t^2)$ est $\mathscr{C}^0$ (et aussi $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^+$. On peut multiplier par $-x$ et composer par exponentielle, la fonction $f_x$ est $\mathscr{C}^0$ (et aussi $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^+$. L'intégrale est donc généralisée en $+\infty$. On a :

   - $\frac{1}{(1+t^2)^x} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2x}}$ car $\frac{t^{2x}}{(1+t^2)^x} = \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^x = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}\right)^x = e^{-x\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)} \underset{t\to+\infty}{\to} 1.$
   - $\frac{1}{t^{2x}}\geq 0$ pour tout $x\in I$ et $t>0$.
   - $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{2x}}\,\mathrm{d}t$ converge car c'est une intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $2x>1$.

   Par comparaison $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t$ converge. Ainsi $\boxed{H \text{ est définie sur } I.}$

2. Soit $\frac{1}{2} < x < y$, on a $-y < -x$, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\ln(1+t^2) \geq 0$ donc $-y\ln(1+t^2) \leq -x\ln(1+t^2)$. On compose par exponentielle qui est croissante sur $\mathbb{R}$ ainsi $\mathrm{e}^{-y\ln(1+t^2)} \leq \mathrm{e}^{-x\ln(1+t^2)}$.

   On intègre de 0 à $+\infty$ avec des bornes dans l'ordre croissant, cela donne (tout converge d'après la question précédente) :

$$H(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^y}\mathrm{d}t \leq H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t.$$

   Donc $\boxed{H \text{ est décroissante sur } I.}$

3. (a) Soit $A > 0$, on a :

$$\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^1}\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^A = \mathrm{Arctan}(A) - \mathrm{Arctan}(0) = \mathrm{Arctan}(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

   D'où l'égalité $H(1) = \frac{\pi}{2}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A > 0$.

$$\begin{array}{c|ccc} + & \frac{1}{(1+t^2)^n} & & 1 \\ & & \searrow & \\ - & \frac{-n(2t)}{(1+t^2)^{n+1}} & \overset{\int}{\longleftarrow} & t \end{array}$$

   Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Par intégration par parties sur le segment $[0, A]$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^A - \int_0^A \frac{-2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t = \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n\int_0^A \frac{(t^2+1)-1}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t - 2n\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

   On a $\frac{A}{(1+A^2)^n} \underset{A\to+\infty}{\sim} \frac{1}{A^{2n-1}} \underset{A\to+\infty}{\to} 0$ car $2n-1 > 0$. De plus, les autres intégrales en jeu convergent. De sorte que, par passage à la limite, on obtient :

$$\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t \underset{A\to+\infty}{\to} 2nH(n) - 2nH(n+1).$$

   On obtient donc : $\boxed{H(n) = 2n(H(n) - H(n+1)).}$

   On développe : $H(n) = 2nH(n) - 2nH(n+1)$, d'où $2nH(n+1) = (2n-1)H(n)$, et donc

$$\boxed{H(n+1) = \tfrac{2n-1}{2n}H(n)}.$$

   (c)

```
function H=emlyon17(n)
    H=%pi/2 //H(1)
    for k=2:n // H vaut H(k-1)
       H=(2*(k-1)-1)*H/(2*(k-1))
       // H vaut (2*(k-1)-1)*H(k-1)/(2*(k-1))=H(k)
    end
endfunction
```

   (d) On pose : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}_n$ : « $H(n) = \dfrac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}\big((n-1)!\big)^2}$. ».

**Init.** Au rang 1, $\dfrac{(0)!\pi}{2^1\left(0!\right)^2} = \dfrac{\pi}{2} = H(1)$. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

**Hér.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. On a

$$H(n+1) = \frac{2n-1}{2n}H(n) \underset{\mathcal{P}_n}{=} \frac{2n-1}{2n}\times\frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2} = \frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n}{2n}\times\frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2}$$

$$= \frac{(2(n+1)-2)!\pi}{2^{2n+1}\left(n!\right)^2} = \frac{(2(n+1)-2)!\pi}{2^{2(n+1)-1}\left(((n+1)-1)!\right)^2}.$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par principe de récurrence, on a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}_n \text{ est vraie.}}$

## Partie II : Étude de $H(x)$ lorsque $x$ tend vers $\frac{1}{2}$

4. (a) La fonction $\varphi : u \mapsto \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$ est une combinaison linéaire d'exponentielles de polynômes donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \varphi'(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2} > 0.$$

Donc $\varphi$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\left]\lim\limits_{-\infty}(\varphi); \lim\limits_{+\infty}(\varphi)\right[$. De plus on a $\lim\limits_{-\infty}(\varphi) = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty}(\varphi) = +\infty$.

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}.}$

Comme $\varphi(0) = 0$, on a $\varphi^{-1}(0) = 0$, et comme $\lim\limits_{+\infty}(\varphi) = +\infty$ on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi^{-1}(t) = +\infty$.

**Remarque.** La fonction $\varphi$ est communément appelée *fonction sinus hyperbolique*, et sa dérivée $\varphi'$ la *fonction cosinus hyperbolique*.

(b) Le changement de variables $t = \varphi(u)$, est de **classe** $\mathscr{C}^1$ et **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$, il est donc licite. Lorsque $t : 0 \to +\infty$, $u : 0 \to +\infty$. De plus on a $dt = \varphi'(u)du = \frac{e^u+e^{-u}}{2}du$. Par le théorème de changement de variables, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}dt$ est de même nature que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\varphi(u)^2)^x}\frac{e^u+e^{-u}}{2}du = \int_0^{+\infty} \frac{4^x}{(4+e^{2u}-2+e^{-2u})^x}\frac{e^u+e^{-u}}{2}du$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{4^x}{(e^{2u}+2+e^{-2u})^x}\frac{e^u+e^{-u}}{2}du$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{4^x}{(e^u+e^{-u})^{2x}}\frac{e^u+e^{-u}}{2}du$$
$$= \frac{4^x}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^u+e^{-u})^{2x-1}}du.$$

Puisqu'on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}dt$ converge, ces deux intégrales sont donc convergentes, et on a :

$$\boxed{\forall x \in I,\ H(x) = \frac{4^x}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^u+e^{-u})^{2x-1}}du.}$$

5. (a) Pour tout $u \in [0; +\infty[$, on a $e^u \leq e^u + e^{-u}$ car $0 < e^{-u}$. Et puisque $u$ est positif, on a $-u \leq u$ donc $e^{-u} \leq e^u$. D'où les inégalités :

$$\boxed{0 < e^u \leq e^u + e^{-u} \leq 2e^u}$$

(b) La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a pour tout $u \in [0;+\infty[$ :

$$0 < \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u} \leq \frac{1}{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}} \leq \mathrm{e}^{-u}.$$

Soit $x > \frac{1}{2}$, on a $2x-1>0$ donc la fonction $t \mapsto t^{2x-1} = \mathrm{e}^{(2x-1)\ln(t)}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :

$$0 < \frac{1}{2^{2x-1}}\mathrm{e}^{-u(2x-1)} \leq \frac{1}{(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u})^{2x-1}} \leq \mathrm{e}^{-u(2x-1)}.$$

En multipliant par $\frac{4^x}{2} \geq 0$, et par croissance de l'intégrale, en notant que toutes les intégrales convergent (l'intégrale usuelle $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u(2x-1)}\mathrm{d}u$ converge car $2x-1>0$), on a :

$$\frac{1}{2^{2x-1}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u(2x-1)} \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u})^{2x-1}} \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u(2x-1)}.$$

Or on a : $\displaystyle\int_0^A \mathrm{e}^{-u(2x-1)}\mathrm{d}u = \left[\frac{\mathrm{e}^{-u(2x-1)}}{-(2x-1)}\right]_0^A = \frac{\mathrm{e}^{-A(2x-1)}-1}{-(2x-1)} \underset{A\to+\infty}{\to} \frac{1}{2x-1}.$

Par conséquent :

$$\frac{4^x}{2^{2x}}\frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2x-1} \leq H(x) \leq \frac{4^x}{2}\frac{1}{2x-1}.$$

D'où l'inégalité voulue :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \frac{1}{2x-1} \leq H(x) \leq \frac{4^x}{2(2x-1)}.}$$

6. On a $2x-1 \underset{(\frac{1}{2})^+}{\to} 0$ (par valeurs positives) donc $\frac{1}{2x-1} \underset{(\frac{1}{2})^+}{\to} +\infty$. Par théorème de comparaison, on en déduit que : $H(x) \underset{(\frac{1}{2})^+}{\to} +\infty$.

Avec $x > \frac{1}{2}$ et $2x-1>0$, on a aussi : $1 \leq (2x-1)H(x) \leq \frac{4^x}{2}$ et $\frac{4^x}{2} = \frac{\mathrm{e}^{x\ln(4)}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{2x\ln(2)}}{2} \underset{(\frac{1}{2})^+}{\to} 1$.

Par théorème des gendarmes, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}(2x-1)H(x)$ existe et vaut 1, ce qui se réécrit :

$$\boxed{H(x) \underset{(\frac{1}{2})^+}{\sim} \frac{1}{2x-1}.}$$

## Partie III : Étude de $H(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$

7. (a) Posons $h : t \in [0,1] \mapsto \ln(1+t)$. La fonction $h$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ comme composée de fonctions qui le sont.

Soit $u \in ]0,1]$ fixé. En appliquant l'égalité des accroissements finis sur $[0,u] \subset [0,1]$, on a l'existence d'un réel $c \in ]0,u[$ tel que

$$h(u) - h(0) = h'(c) \times u = \frac{u}{1+c}.$$

Comme de plus $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{1+c}$ donc avec $u$ positif, on a

$$\boxed{\ln(1+u) \geq \frac{u}{2}.}$$

Notons que cette égalité est aussi vérifiée pour $u=0, pusqu'alors\, \ln(1+u) = 0 = \frac{u}{2}$.

**Remarque.** On aurait pu faire une étude de fonction également pour montrer que $g : t \mapsto \ln(1+t) - \dfrac{t}{2}$ est positive sur $[0,1]$.

(b) On rappelle que pour $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, une densité de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

D'où ici en posant $\mu = 0, \sigma^2 = \frac{1}{x}$, on obtient : $\quad f(t) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2\pi}} \ \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}$.

Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2/2}\mathrm{d}t$ converge aussi et vaut $\sqrt{\frac{2\pi}{x}}$. Par parité de $f$, on obtient donc que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2/2}\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{2\pi}{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.}$

**Remarque.** On pouvait aussi procéder à un changement de variables affine afin de se ramener à une intégrale de Gauss, en posant $u = \sqrt{x}t$.

(c) Soit $x \in I$ et $t \in [0,1]$, on obtient en appliquant la question 7.(a) avec $t^2 \in [0,1]$ :

$$0 \leq \frac{1}{(1+t^2)^x} = \mathrm{e}^{-x\ln(1+t^2)} \leq e^{-xt^2/2}.$$

Par croissance de l'intégrale (tout converge car ce sont des intégrales de fonctions continues sur un segment) :

$$\boxed{0 \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \mathrm{e}^{-xt^2/2}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \mathrm{e}^{-xt^2/2}\mathrm{d}t + \underbrace{\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2/2}\mathrm{d}t}_{0\leq} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.}$$

(d) Soit $x \in I, t \geq 1$, on a :

$$0 < t^2 < 1 + t^2 \ \Rightarrow \ 0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2} \ \Rightarrow \ 0 \leq \frac{1}{(1+t^2)^x} \leq \frac{1}{t^{2x}}$$

car la fonction $u \mapsto u^x$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. En intégrant sur $[1, +\infty[$ (possible car toutes les intégrales convergent, on reconnait notamment une intégrale de Riemann convergente avec $2x > 1$), on obtient par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2x}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2x-1}.$$

Ainsi on a bien :

$$\boxed{\forall x \in I, \ 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2x-1}.}$$

(e) On a $\sqrt{\frac{\pi}{2x}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ et $\frac{1}{2x-1} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ donc par théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t$ existent et valent 0. D'où par somme de limites et relation de Chasles pour les intégrales convergentes, on obtient :

$$\boxed{H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\to} 0.}$$

8. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln\left(H(n)\right) + \dfrac{\ln(n)}{2}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \ln\left(H(n+1)\right) + \frac{\ln(n+1)}{2} - \ln\left(H(n)\right) - \frac{\ln(n)}{2} \\
&= \ln\left(\frac{H(n+1)}{H(n)}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \underbrace{\ln\left(\frac{2n-1}{2n}\right)}_{\text{Avec la question } \mathbf{3.b.}} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

On utilise le développement limité $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, on peut le faire car $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. On obtient :

$$u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que $\boxed{u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{8n^2}.}$

(b) On a :

- $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{8n^2}$,
- $\frac{1}{n^2} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
- la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge avec $\alpha = 2 > 1$.

Par théorème de comparaison, $\boxed{\text{la série } \sum(u_{n+1} - u_n) \text{ converge.}}$

(c) Une série converge si et seulement si ses sommes partielles convergent. Or, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N-1} (u_{n+1} - u_n) = u_N - u_1 \text{ par télescopage.}$$

La série étant convergente d'après la question précédente, on en déduit que la suite $(u_n)$ converge vers une limite finie qu'on notera $a$. Par composition, la suite $(e^{u_n})$ converge vers $K = e^a > 0$ (car la fonction exponentielle est continue). Or $e^{u_n} = e^{\ln(H(n)) + \frac{\ln(n)}{2}} = H_n\sqrt{n}$, d'où finalement : $H_n\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} K$ avec $K$ non nul, ce qui se réécrit :

$$\boxed{H(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}.}$$

9. Pour tout $x > 1$, on a $1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$, d'où par décroissance de $H$ :

$$H(\lfloor x \rfloor + 1) \leq H(x) \leq H(\lfloor x \rfloor).$$

On multiplie par $\frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}{K} > 0$ :

$$\frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}{K} H(\lfloor x \rfloor + 1) \leq \frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}{K} H(x) \leq \frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}{K} H(\lfloor x \rfloor).$$

On obtient :

$$\frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}{\sqrt{\lfloor x \rfloor + 1}} \frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor + 1}}{K} H(\lfloor x \rfloor + 1) \leq \frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}{K} H(x) \leq \frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}{K} H(\lfloor x \rfloor)$$

On a :

- pour le terme de droite, puisque $H(\lfloor x \rfloor) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}$, on a $\frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}{K} H(\lfloor x \rfloor) \underset{x\to+\infty}{\to} 1$.
- Pour le terme de gauche, on a déjà $\frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor + 1}}{K} H(\lfloor x \rfloor + 1) \underset{x\to+\infty}{\to} 1$. D'autre part, on a :

$$\sqrt{\frac{\lfloor x \rfloor}{\lfloor x \rfloor + 1}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}}} \underset{x\to+\infty}{\to} 1.$$

Ainsi par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor}}{K} H(x)$ existe et vaut 1. On a donc :

$$H(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{\lfloor x \rfloor}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{x}}$$

car $x \underset{x\to+\infty}{\sim} \lfloor x \rfloor$. En effet $1 \leq \frac{x}{\lfloor x \rfloor} \leq \frac{\lfloor x \rfloor + 1}{\lfloor x \rfloor} \underset{x\to+\infty}{\to} 1$. On a donc montré que : $\boxed{H(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{x}}.}$

## Partie IV : Étude d'une suite de variables aléatoires

Correction à reprendre, non vérifiée, directement pris de l'APHEC
Repris dans le TD25 2018-2019 dans un exercice (correction tapée)

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{2}{\pi(1+t^2)} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

10. $f$ est définie sur $\mathbb{R}$, elle y est positive, elle est continue sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $[0;+\infty[$. Comme $f$ est nulle sur $]-\infty,0[$, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \frac{2}{\pi}H(1) = 1$.

    Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

    Bilan : $\boxed{f \text{ est une densité.}}$

11. On considère une variable aléatoire $X$ à densité, de densité $f$.

    (a) Soit $x < 0$, $F_X(x) = 0$ car $f$ nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$.
    Soit $x \geqslant 0$, $F_X(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt = \frac{2}{\pi}\text{Arctan}(x)$.

    (b) $X$ a pour densité $f$ donc $X$ a une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge. Or $tf(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2t}{\pi(1+t^2)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi t}$ et la fonction $t \mapsto tf(t)$ est positive sur $\mathbb{R}^+$.
    Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge, $X$ n'a pas d'espérance.

12. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à densité, à valeurs strictement positives, mutuellement indépendantes, dont chacune a pour densité $f$.
    On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $M_n = \max(X_1, \cdots, X_n)$ et $Z_n = \dfrac{n}{M_n}$.

    (a) Soit $n$ de $\mathbb{N}^*, x \leq 0$ comme les $X_k$ sont à valeurs strictement positives, on a $[M_n \leq x] = [\max(X_1, \cdots, X_n) \leq x] = \emptyset$ donc $F_{M_n}(x) = \mathbf{P}(M_n \leq x) = 0$.

    Soit $x > 0$, $[M_n \leq x] = [\max(X_1, \cdots, X_n) \leq x]$ est réalisé si et seulement si, pour tout $k \in [\![1,n]\!], [X_k \leq x]$ est réalisé. Donc

    $$[M_n \leq x] = \bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leq x].$$

    Par indépendance mutuelle des $X_k$, on obtient

    $$\mathbf{P}(M_n \leq x) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_k \leq x) = (F_X(x))^n \text{ car il y a } n \text{ facteurs dans le produit.}$$

    Bilan : $\boxed{F_{M_n}(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \text{ et } F_{M_n}(x) = (F_X(x))^n \text{ si } x > 0.}$

    (b) On pose $\forall u \in ]0;+\infty[, g(u) = \text{Arctan}(u) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{u}\right)$. La fonction inverse est dérivable sur $]0;+\infty[$ et Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc par composition $u \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.
    Par somme, $g$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout $u \in ]0;+\infty[$,

    $$g'(u) = \frac{1}{1+u^2} + \left(-\frac{1}{u^2}\right) \times \text{Arctan}'\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{1+u^2} + \left(-\frac{1}{u^2}\right) \times \frac{1}{1+(1/u)^2} = \frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+u^2} = 0.$$

    Donc la fonction $g$ est constante sur <u>l'intervalle</u> $]0;+\infty[$.

Or $g(1) = 2\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2}$.

Finalement : $\boxed{\forall u \in ]0; +\infty[, \text{Arctan}(u) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}}$.

Remarque : La fonction $u \mapsto \text{Arctan}(u) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right)$ est constante sur $]-\infty; 0[$ de valeur $-\frac{\pi}{2}$. C'est l'exemple classique de fonction à dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$ et non constante sur $\mathbb{R}^*$.

Le cours assure que $\tan(t) \underset{0}{\sim} t$ donc en posant $t = \text{Arctan}(u) \underset{u\to 0}{\to} 0$,

on a $\underbrace{\tan(\text{Arctan}(u)) = u}_{\text{valable au voisinage de } 0} \underset{0}{\sim} \text{Arctan}(u)$.

(c) Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*, x \in ]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z_n \leq x) &= \mathbf{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq x\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\frac{n}{x} \leq M_n\right) \text{ avec } x > 0 \text{ et } M_n \text{ forcément strictement positif} \\
&= 1 - \mathbf{P}\left(M_n \leq \frac{n}{x}\right) \text{ sachant que } M_n \text{ est à densité} \\
&= 1 - F_{M_n}\left(\frac{n}{x}\right) \\
&= 1 - \left(\frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{n}{x}\right)\right)^n \text{ car } \tfrac{n}{x} > 0 \\
&= 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \text{ car si } u > 0, \text{ alors } \text{Arctan}(u) + \text{Arctan}\left(\tfrac{1}{u}\right) = \tfrac{\pi}{2} \\
&\quad \text{donc } 1 - \tfrac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\tfrac{1}{u}\right) = \tfrac{2}{\pi}\text{Arctan}(u).
\end{aligned}$$

(d) Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*, x \in ]0; +\infty[$, on sait que $0 < \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right) < \frac{\pi}{2}$ donc $0 < \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right) < 1$ et $0 < 1 - \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right) < 1$ donc on pourra composer par ln.

Par conséquent $\left(1 - \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right)$.

On sait que $-\frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ car $\frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc avec $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ on a $\ln\left(1 - \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2x}{\pi n}$ car $\frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $\text{Arctan}(u) \underset{0}{\sim} u$.

On en déduit que $n \ln\left(1 - \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2x}{\pi}$ donc, sachant que $-\frac{2x}{\pi}$ est indépendant de $n$, on a

$$n \ln\left(1 - \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\to} -\frac{2x}{\pi}.$$

On peut composer cette limite par exponentielle qui est continue en $-\frac{2x}{\pi}$.

Donc $\left(1 - \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-\frac{2x}{\pi}}$.

On en déduit que

$$\boxed{\mathbf{P}(Z_n \leq x) \underset{n\to+\infty}{\to} 1 - e^{-\frac{2}{\pi}x}}.$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\frac{2}{\pi}$.

Bilan : la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable suivant une loi exponentielle de paramètre $\frac{2}{\pi}$.