DM15

Devoir maison de révisions type EM Lyon

Exercice 1 (EML 2017)
Partie I : Étude d'un exemple.

On considère la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle inversible ? Quel est son rang ?

2. Quelles sont les valeurs propres de A ? La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

3. Déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, telles que : $A = PDP^{-1}$.

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de polynômes.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n, et $\mathscr{B} = (1, X, \cdots, X^n)$ la base canonique de E.
On note, pour tout polynôme P de E, $T(P) = (X(X-1)P')'$, où l'accent désigne la dérivation.
Par exemple, si $P = X^2$, alors $P' = 2X$, et donc

$$T(P) = (X(X-1)2X))' = (2X^3 - 2X^2)' = 6X^2 - 4X.$$

4. Montrer que T est un endomorphisme de E.

5. Calculer, pour tout k de $\{0, \cdots, n\}, T(X^k)$. En déduire la matrice M de T dans la base $\mathscr{B}$.

6. L'endomorphisme T est-il bijectif ? Quel est le rang de T ? Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$.

7. Quelles sont les valeurs propres de T ? L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

Partie III : Intervention d'un produit scalaire.

On conserve les notations de la partie II.
On considère l'application $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \varphi(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x.$$

8. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

9. Démontrer : $\forall (P,Q) \in E^2, \quad \varphi(T(P),Q) = -\int_0^1 x(x-1)P'(x)Q'(x)\mathrm{d}x.$

10. En déduire que T est un endomorphisme symétrique de E pour le produit scalaire φ.

    Quel résultat de la partie II peut-on retrouver ainsi ?

11. (a) Établir : $\forall P \in E, \quad \varphi(T(P),P) \geq 0$.

    (b) Déterminer l'ensemble des polynômes P de E tels que $\varphi(T(P),P) = 0$.

Partie IV : Retour sur l'exemple de la partie I.

On conserve les notations des parties II et III et on suppose dans cette partie que $n = 2$.

12. Quelle est la matrice de T dans la base $\mathscr{B}$ de E ?

13. En utilisant les résultats obtenus dans la question 3. de la partie I, déterminer une base orthonormale $\mathscr{C}$ de E pour le produit scalaire φ, formée de vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de T dans l'ordre croissant.

14. Déterminer, par sa matrice dans la base $\mathscr{C}$ de E, un endormorphisme V de E, symétrique pour le produit scalaire φ, tel que

$$\begin{cases} V \circ V = T \\ \forall P \in E, \quad \varphi(V(P), P) \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 2

On définit la fonction réelle H d'une variable réelle x par : $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} \mathrm{d}t$.

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Partie I : Premières propriétés de la fonction H.

1. Justifier que la fonction H est définie sur I.

2. Montrer que H est décroissante sur I.

3. (a) Calculer $H(1)$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que : $H(n) = 2n(H(n) - H(n+1))$.
   En déduire une expression de $H(n+1)$ en fonction de n et de $H(n)$.

   (c) Écrire un programme `Scilab` qui, étant donné un entier n de $\mathbb{N}^*$, renvoie la valeur de $H(n)$.

   (d) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H(n) = \dfrac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}\big((n-1)!\big)^2}$.

Partie II : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$.

4. (a) Montrer que la fonction $\varphi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}}{2}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   Préciser $\varphi^{-1}(0)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi^{-1}(t)$.

   (b) À l'aide du changement de variables $t = \varphi(u)$, montrer que :

$$\forall x \in I,\ H(x) = \frac{4^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u})^{2x-1}} \mathrm{d}u.$$

5. (a) Justifier que : $\forall u \in [0; +\infty[,\ \mathrm{e}^u \leqslant \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u} \leqslant 2\mathrm{e}^u$.

   (b) En déduire que : $\forall x \in I,\ \dfrac{1}{2x-1} \leqslant H(x) \leqslant \dfrac{4^x}{2(2x-1)}$.

6. Déterminer la limite de H en $\frac{1}{2}$ et un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$.

Partie III : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

7. (a) Montrer que : $\forall u \in [0;1],\ \ln(1+u) \geqslant \frac{u}{2}$.

   (b) Montrer que, pour tout x de I, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2/2}\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

   (c) En déduire que : $\displaystyle\forall x \in I,\ 0 \leqslant \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-xt^2/2}\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

   (d) Montrer que : $\displaystyle\forall x \in I,\ 0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2x-1}$.

   (e) En déduire la limite de H en $+\infty$.

8. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln\left(H(n)\right) + \dfrac{\ln(n)}{2}$.

   (a) Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
   On pourra utiliser le résultat obtenu à la question 3.(b).

   (b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1} - u_n)$ converge.

   (c) En déduire l'existence d'un réel K strictement positif tel que : $\displaystyle H(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}$.

9. Donner enfin un équivalent simple de $H(x)$ lorsque le réel x tend vers $+\infty$ à l'aide de K.

Partie IV : Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{2}{\pi(1+t^2)} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

10. Montrer que f est une densité.

11. On considère une variable aléatoire X à densité, de densité f.

    (a) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

    (b) La variable X admet-elle une espérance ? une variance ?

12. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à densité, à valeurs strictement positives, mutuellement indépendantes, dont chacune a pour densité f.
    On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $M_n = \max(X_1, \cdots, X_n)$ et $Z_n = \dfrac{n}{M_n}$.

    (a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition F_{M_n} de M_n.

    (b) Justifier : $\displaystyle\forall u \in]0;+\infty[, \mathrm{Arctan}(u) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}$
    et $\mathrm{Arctan}(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.

    (c) Montrer alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\forall x \in]0;+\infty[,\ \mathbf{P}(Z_n \leqslant x) = 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$.

    (d) En déduire que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on reconnaîtra la loi.
