DM15

Devoir maison de révisions type Ecricome

Exercice 1 (Ecricome 2020)

1. (a) On a $\boxed{T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1}$ et $\boxed{T_3 = 2XT_2 - T_1 = 4X^4 - 2X - X = 4X^3 - 3X.}$

   (b) Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{H}_n$: « $\deg(T_n) = n$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Init. Puisque $T_0 = 1$ et $T_1 = X$, $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sont vraies.

   Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ vraies. On a :

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

   Par hypothèse de récurrence, on a $\deg(2XT_{n+1}) = 1 + n + 1 = n + 2$ et $\deg(-T_n) = n$. D'où $\deg(T_{n+1}) = \max(\deg(2XT_{n+1}, -T_n) = n + 2$ et $\mathcal{H}_{n+2}$ vraie.

   Concl. Par principe de récurrence, on a $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \deg(T_n) = n.}$

   (c) $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une famille de $n + 1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ échelonnés en degré. C'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$, de cardinal $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Par conséquent, $\boxed{(T_k)_{0\leq k\leq n} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On applique la formule rappelée avec $a = (n + 1)x, b = x$:

$$\cos((n+1)x)\cos(x) = \frac{1}{2}\left(\cos((n+1)x + x) + \cos((n+1)x - x)\right).$$

   D'où :

$$\boxed{\cos((n+2)x) + \cos(nx) = 2\cos((n+1)x)\cos(x).}$$

   (b) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{H}_n$: « $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Init. Puisque $T_0 = 1$ et $T_1 = X$, on a $T_0(\cos(x)) = 1 = \cos(0)$ et $T_1(\cos(x)) = \cos(x) = \cos(1 \times x)$. Donc $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sont vraies.

   Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ vraies. On a :

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On évalue cette expression en $X = \cos(x)$:

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(x)) &= 2\cos(x)T_{n+1}(\cos(x)) - T_n(\cos(x)) \\ &= 2\cos(x)\cos((n+1)x)) - \cos(nx) \qquad \text{par hyp. de réc.} \\ &\overset{2.(a)}{=} \cos((n+2)x) + \cos(nx) - \cos(nx) = \cos((n+2)x) \end{aligned}$$

   Ainsi $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie.

   Concl. Par principe de récurrence, on a $\boxed{T_n(\cos(x)) = \cos(nx) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R}.}$

3. (a) Montrons tout d'abord la convergence de l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   La fonction $g_k : t \mapsto \dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ étant de la parité de k (paire si k paire, impaire si k impaire), l'intégrale I_k est de même nature que $J_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. Comme de plus g_k est continue sur $[0, 1[$, l'intégrale J_k est généralisée en 1. On a :

   - pour tout $t \in [0, 1[$, $g_k(t) = \dfrac{t^k}{\sqrt{(1+t)(1-t)}} \underset{t\to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$;
   - $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1[$;

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ est une intégrale de Riemann en 1, d'exposant $\alpha = 1/2 < 1$. Elle converge donc.

Par théorème de comparaison, l'intégrale J_k converge pour tout $k \in \mathbb{N}$, et il en est donc de même de I_k par parité.

Soit à présent $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. On a $P \times Q \in \mathbb{R}[X]$, de sorte qu'il existe $d \geq 0$ et $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ tels que $P \times Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Par linéarité des intégrales généralisées (toutes les intégrales I_k convergent), on en déduit que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge, et on a :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{d} a_k I_k.$$

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \text{ l'intégrale } \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$

(b) On pose φ l'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$.

- Avec 3(a), on sait que φ est bien définie à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- **Linéarité à gauche.** Soit $(P,Q,R) \in \mathbb{R}_n[X]^3$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha P + \beta R, Q) &= \int_{-1}^{1} \frac{(\alpha P(t) + R(t))Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\ &\underset{\text{Tout conv.}}{=} \alpha \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + \beta \int_{-1}^{1} \frac{R(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\ &= \alpha\varphi(P,Q) + \beta\varphi(R,Q).\end{aligned}$$

  Donc φ est linéaire à gauche.
- **Symétrie.** Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\varphi(Q,P) = \int_{-1}^{1} \frac{Q(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \varphi(P,Q).$$

  Ainsi φ est symétrique. Comme φ est aussi linéaire à gauche, elle est bilinéaire.
- **Positif.** On a :

$$\varphi(P,P) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \geq 0$$

  car $\frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} \geq 0$ pour tout $t \in]-1,1[$. φ est positive.
- **Défini positif.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P,P) = 0$. On a :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = 0.$$

  La fonction $t \mapsto \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est **continue** et **positive** sur $]-1,1[$. Par théorème de nullité de l'intégrale, on en conclut que :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \forall t \in]-1,1[, \quad P(t) = 0.$$

  Le polynôme P a donc une infinité de racines (tous les réels entre -1 et 1 strictement). P est donc le polynôme nul.

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire.}}$

(c) Soit n, m des entiers naturels distincts. On a :
$$\int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n+m)x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n-m)x)\mathrm{d}x$$
à l'aide de la formule
$$\cos(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}(\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)).$$
Puisque $n+m \neq 0$ et $n-m \neq 0$, on a :
$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)x)}{n+m}\right]_0^\pi + \left[\frac{\sin((n-m)x)}{n-m}\right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((n+m)\pi)-0}{n+m}\right) + \left(\frac{\sin((n-m)\pi)-0}{n-m}\right) \boxed{= 0.}\end{aligned}$$

(d) Soient n et m sont deux entiers naturels distincts. On a :
$$\langle T_n, T_m\rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t.$$
Effectuons le changement de variables $t = \cos(x)$ dans cette intégrale convergente. On a $t = \cos(x)$, $\mathrm{d}t = -\sin(x)\mathrm{d}x$, et $x : \pi \to 0$ lorsque $t : -1 \to 1$. De plus, le changement de variables est licite car la fonction $\varphi : x \in]0, \pi[\mapsto \cos(x)$ est strictement décroissante et de classe $\mathscr{C}^1$. Par théorème de changement de variables, les intégrales suivantes convergent toutes les deux et on a :
$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t &= \int_\pi^0 \frac{T_n(\cos(x))T_m(\cos(x))}{\sqrt{1-\cos(x)^2}}(-\sin(x))\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \frac{T_n(\cos(x))T_m(\cos(x))}{\sqrt{\sin(x)^2}}\sin(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
Pour tout $x \in]0, \pi[$, on a $\sqrt{\sin(x)^2} = |\sin(x)| = \sin(x)$ car sin est positive sur $]0, \pi[$. On obtient donc :
$$\langle T_n, T_m\rangle = \int_0^\pi T_n(\cos(x))T_m(\cos(x))\mathrm{d}x \overset{2.(b)}{=} \int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x.$$
À l'aide de la question 3.(c), on conclut donc que : $\boxed{\langle T_n, T_m\rangle = 0.}$

(e) Le changement de variable reste valable avec $n = m$, de sorte que :
$$\langle T_n, T_n\rangle = \int_0^\pi \cos(nx)^2\mathrm{d}x.$$
En prenant $a = b = nx$ dans la formule rappelée dans l'énoncé, on a $\cos(nx)^2 = \frac{1}{2}(\cos(2nx) + 1)$. D'où en substituant dans l'intégrale :
$$\langle T_n, T_n\rangle = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(2nx)+1)\mathrm{d}x.$$
Pour $n = 0$, on obtient :
$$\langle T_n, T_n\rangle = \frac{1}{2}\int_0^\pi 2\mathrm{d}x = \int_0^\pi 1\mathrm{d}x = \pi.$$
Pour $n > 0$, on a :
$$\langle T_n, T_n\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2nx)}{2n} + x\right]_0^\pi = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$
Finalement, on a bien :
$$\boxed{\|T_n\|^2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n \geq 1, \\ \pi & \text{si } n = 0. \end{cases}}$$

(f) Avec 1.(c), on sait que $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Elle est de plus orthogonale selon 3.(d). Il nous reste à normaliser chacun de ses éléments pour obtenir une base orthonormée. Ainsi, $\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}T_0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_1, \ldots, \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n\right) \text{ est une base orthonormé}}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

4. (a) On vient de voir que $\left(\frac{1}{\|T_0\|}T_0, \frac{1}{\|T_1\|}T_1, \ldots, \frac{1}{\|T_n\|}T_n\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Par le cours, le vecteur $X^n \in \mathbb{R}_n[X]$ se décompose dans cette base comme suit :

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} \left\langle X^n, \frac{1}{\|T_k\|}T_k \right\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|} = \sum_{k=0}^{n} \langle X^n, T_k \rangle \frac{T_k}{\|T_k\|^2}$$

(b) D'après le cours, la borne inférieure d_n est atteinte en un unique vecteur P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui n'est autre que le projeté orthogonal de X^n sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Or $\left(\frac{1}{\|T_0\|}T_0, \frac{1}{\|T_1\|}T_1, \ldots, \frac{1}{\|T_{n-1}\|}T_{n-1}\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (preuve analogue à ce qui a été fait plus haut). Ainsi, on a par le cours que :

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} \langle X^n, T_k \rangle \frac{1}{\|T_k\|^2} T_k,$$

et donc que :

$$\begin{aligned} d_n = \|X^n - P\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n} \langle X^n, T_k \rangle \frac{T_k}{\|T_k\|^2} - \sum_{k=0}^{n-1} \langle X^n, T_k \rangle \frac{T_k}{\|T_k\|^2} \right\| \\ &= \left\| \langle X^n, T_n \rangle \frac{T_n}{\|T_n\|^2} \right\| = |\langle X^n, T_n \rangle| \frac{\|T_n\|}{\|T_n\|^2} \boxed{= \frac{|\langle X^n, T_n \rangle|}{\|T_n\|}}. \end{aligned}$$

(c) On remarque que $X^2 = \frac{1}{2}(2X^2 - 1) + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2}T_0$. D'où en substituant dans la formule obtenue à la question précédente :

$$d_2 = \frac{|\langle X^2, T_2 \rangle|}{\|T_2\|} = \frac{\left|\left\langle \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2}T_0, T_2 \right\rangle\right|}{\|T_2\|} = \frac{1}{2} \times \frac{|\langle T_2, T_2 \rangle + \langle T_0, T_2 \rangle|}{\|T_2\|} = \frac{1}{2} \times \frac{\|T_2\|^2}{\|T_2\|} = \frac{\|T_2\|}{2}.$$

Avec le résultat de 3.(e), on a donc $\boxed{d_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.}$

Exercice 2 (Ecricome 2008)

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

1. (a) Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et la série de terme général $f_n(0)$ converge. Supposons $x \in \mathbb{R}_+^*$ à présent. On a :

- $\forall n \geq 1,\ f_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x} = \dfrac{x}{n(n+x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$.
- $\dfrac{1}{n^2} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.
- $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc convergente.

Par théorème de comparaison, $\boxed{\text{la série de terme général } f_n(x) \text{ est convergente.}}$

(b) On a $F(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{f_n(0)}_{=0} \boxed{= 0}$. Pour tout $N \geq 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(1) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi $\boxed{F(1) \text{ est égal à } 1.}$

2. Soit $n \geq 1$. La fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ comme composée et quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, on a pour tout $x \geq 0$:
$$0 \leq f_n'(x) = \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$
$\sum \frac{1}{n^2}$ étant convergente en tant que série de Riemann d'exposant $2 > 1$, on en déduit par théorème de comparaison que $\boxed{\sum_{n\geq 1} f_n'(x) \text{ converge, et ceci pour tout } x \geq 0.}$

3. (a) La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[n, +\infty[$, et on a pour tout $t \in [n, +\infty[$:
$$\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} \text{ et } \varphi''(t) = \frac{2}{t^3}.$$
En particulier, on a pour tout $t \in [n, +\infty[$:
$$|\varphi''(t)| \leq \frac{2}{n^3} =: M.$$
Par l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, on a donc que pour tout $(x, x_0) \in [n, +\infty[^2$:
$$\boxed{|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leq \frac{M}{2!}(x - x_0)^2 = \frac{(x - x_0)^2}{n^3}.}$$
(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}_+$, on a :
$$\begin{aligned}|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| &= |\varphi(n) - \varphi(n+x+h) - \varphi(n) + \varphi(n+x) + h\varphi(n+x)| \\ &= |\varphi(n+x+h) - \varphi(n+x) - h\varphi(n+x)| \\ &\leq \frac{((n+x+h) - (n+x))^2}{n^3} = \frac{h^2}{n^3}\end{aligned}$$
en appliquant l'inégalité démontrée à la question précédente (possible car $n+x$ et $n+x+h$ appartiennent à $[n, +\infty[$). Puisque $\sum \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann d'exposant $3 > 1$, elle converge. Par théorème de comparaison, $\boxed{\text{la série } \sum |f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| \text{ converge.}}$

(c) On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}_+$:
$$\begin{aligned}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) &= \frac{1}{h}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x+h) - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) - h\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)\right) \\ &= \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{+\infty}(f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x))\end{aligned}$$
D'après la question précédente, la série de terme général $f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)$ converge absolument, et on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| \leq \frac{h^2}{n^3}.$$
Par inégalité triangulaire, on en déduit que :
$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)\right| &\leq \left|\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{+\infty}(f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x))\right| \\ &\leq \frac{1}{|h|}\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| \\ &\leq \frac{1}{|h|}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{h^2}{n^3} = |h|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.\end{aligned}$$

En posant $K = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$, on a donc bien que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x+h \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq K|h|.}$$

(d) Puisque $\lim_{h\to 0} K|h| = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \text{ existe et vaut } G(x).$$

Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\boxed{F \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et que } F' = G.}$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ **fixé**.

(a) La fonction $\varphi_x : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} = \frac{x}{t(t+x)}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, de sorte que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \varphi_x(k+1) \leq \varphi_x(t) \leq \varphi_x(k).$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient en intégrant ces inégalités entre k et $k+1$ que :

$$\varphi_x(k+1) = \int_k^{k+1} \varphi_x(k+1)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \varphi_x(k)\,\mathrm{d}t = \varphi_x(k).$$

En notant que $\varphi_x(k+1) = f_{k+1}(x)$ et $\varphi_x(k) = f_k(x)$, on obtient l'inégalité souhaitée :

$$\boxed{f_{k+1}(x) \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) \mathrm{d}t \leq f_k(x).}$$

(b) Soit $n \geq 2$. Sommons ces inégalités pour $k = 1, \ldots, n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1}(x) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) \mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x).$$

D'où par changement d'indice et relation de Chasles :

$$\sum_{k=2}^{n} f_k(x) \leq \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) \mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x).$$

On a donc, d'une part, que :

$$\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) \mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) \leq \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) + \underbrace{f_n(x)}_{\geq 0} = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Et d'autre part :

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + \sum_{k=2}^{n} f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) \mathrm{d}t.$$

D'où les inégalités suivantes pour tout $n \geq 2$:

$$\boxed{\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) \mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) \mathrm{d}t.}$$

(c) On a :

$$\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t = [\ln(t) - \ln(t+x)]_1^n = \ln(n) - \ln(n+x) - \ln(1) + \ln(1+x) = \ln\left(\frac{n}{n+x}\right) + \ln(1+x).$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+x} = 1$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n+x}\right) = 0$ (par continuité de la fonction logarithme). En passant à la limite dans l'inégalité obtenue à la question précédente, on obtient donc (puisque tout converge dans ces inégalités) :

$$\boxed{\ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = F(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).}$$

(d) Pour tout $x > 0$, on a $\ln(1+x) > 0$. D'où en divisant les inégalités précédentes par $\ln(1+x)$:

$$1 \leq \frac{F(x)}{\ln(1+x)} \leq 1 + \frac{x}{(x+1)\ln(1+x)}$$

On a $\frac{x}{(x+1)\ln(1+x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(1+x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{\ln(1+x)}$ existe et vaut 1, ce qui s'écrit aussi :

$$\boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(1+x).}$$

Pour aller plus loin.

On a :

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = \frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi, on a plus simplement $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.

Problème. (Ecricome 2008)

I. Méthode de Monte-Carlo

1. (a) Une densité de U est :

$$\boxed{f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(b) Par le théorème de transfert, la variable $g(U)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument. Or ceci est bien le cas puisqu'il s'agit d'une intégrale d'une fonction continue sur un segment. On peut donc conclure que $\boxed{g(U) \text{ admet une espérance égale à } J = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.}$

2. (a) Par lemme de coalition, les variables $g(U_i)$ sont mutuellement indépendantes. Elles suivent également toutes la même loi, et admettent donc une même espérance, qui vaut J par la question précédente, et une même variance σ^2 (sous réserve d'existence).

Justifions que la variable $g(U)$ admet une variance, ou de manière équivalente, un moment d'ordre 2. Toujours par le théorème de transfert, $g(U)$ admet un moment d'ordre 2 si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge absolument. Ce qui est bien le cas, toujours parce qu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Ainsi $V(g(U))$ existe, et on supposera dans la suite que $V(g(U)) = \sigma^2 =\neq 0$.

On peut donc appliquer la loi faible des grands nombres : $\boxed{\left(\dfrac{S_n}{n}\right) \text{ converge en probabilité vers } J.}$

(b) i. Les variables $g(U_i)$ sont indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance commune J et d'écart-type commun $\sigma \neq 0$. De plus, on a :

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) \underset{\text{lin. de l'esp.}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(g(U_i)) = J$$

et :

$$V\left(\frac{S_n}{n}\right) \underset{\text{indép. des } g(U_i)}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(g(U_i)) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Par le théorème limite central, $\boxed{\left(\dfrac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers } X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1).}$

ii. **Étape 1 : fixer le niveau de confiance.** Soient $a < b$. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a < \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq b\right) = P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi $\mathscr{N}(0,1)$. Fixons $a = -b$. On a :

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(b) - \Phi(-b) = \Phi(b) - (1 - \Phi(b)) = 2\Phi(b) - 1.$$

On cherche $b \in \mathbb{R}$ tel que :

$$2\Phi(b) - 1 = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(b) = 0.975 = \Phi(1.96).$$

Puisque Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$, donc on a (par injectivité de Φ) que $b = 1.96$.

Étape 2 : expliciter l'intervalle de confiance. On résout l'inéquation :

$$-b < \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq b \Leftrightarrow -b \leq \frac{J - \frac{S_n}{n}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < b \Leftrightarrow -b\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq J - \frac{S_n}{n} < b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{S_n}{n} - b\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq J < \frac{S_n}{n} + b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Un intervalle de confiance asymptotique pour J, au niveau de confiance 95%, est donc $\boxed{\left[\frac{S_n}{n} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \frac{S_n}{n} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].}$

3. (a) Éffectuons le changement de variable $t = \sin(u)$ dans l'intégrale proposée. On a $u : 0 \to \dfrac{\pi}{2}$ lorsque $t : 0 \to 1$. La fonction $\varphi : u \mapsto \sin(u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et on a $\varphi'(u) = \cos(u)$ pour tout $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi, on a $\mathrm{d}t = \cos(u)\mathrm{d}u$. Le changement de variable est licite car il se fait sur un segment et φ étant $\mathscr{C}^1$ (inutile de se préoccuper de la stricte monotonie de φ ici, nous ne sommes pas dans le cas d'une intégrale généralisée). On obtient donc par théorème de changement de variable :

$$\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin(u)^2}\cos(u)\mathrm{d}u = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{cos(u)^2}\cos(u)\mathrm{d}u = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |cos(u)|\cos(u)\mathrm{d}u$$
$$\underset{\cos(u)\geq 0 \text{ sur } [0,\pi/2]}{=} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2\mathrm{d}u$$

Reste à linéariser $\cos(u)^2$ afin de calculer cette intégrale :

$$\cos(u)^2 = \left(\frac{e^{iu}+e^{-iu}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2iu}+2+e^{-2iu}}{4} = \frac{2\cos(2u)+2}{4} = \frac{\cos(2u)+1}{2}.$$

On en déduit que :

$$\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2u)+1}{2}\mathrm{d}u = 2\left[\frac{\sin(2u)}{2}+u\right]_0^{\pi/2} \boxed{= \pi.}$$

(b) i. On propose la fonction suivante.

```
function y = G(t)
        y = 4*sqrt(1-t^2)
endfunction
```

ii. On suppose que n est « grand », de sorte que par la question 2.(a), $\dfrac{S_n}{n}$ est « probablement » proche de J.

```
J = 0 ;
for i = 1:n
        J = J + G(rand())
end
J = J/n
```

Remarque. La convergence en probabilité ne nous met pas totalement à l'abri d'un « mauvais » tirage, et il se peut donc que le programme retourne une valeur totalement fantaisiste de J.

Déjà vu ?
On reconnait ici la méthode de Monte Carlo de calcul approché d'une intégrale qui a été mise en oeuvre dans le **TP9. Méthode de Monte Carlo**

II. Réduction de la variance par variables antithétiques.

4. $V = 1-U$ est une transformation affine de la variable à densité U. V est donc à densité également, et une densité de V est donnée par la fonction :

$$g : t \mapsto \frac{1}{|-1|} f\left(\frac{t-1}{-1}\right) = f(1-t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1-t \in [0,1] \Leftrightarrow t \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{1-U \text{ suit une loi } \mathscr{U}([0,1]).}$

Puisque U et $1-U$ suivent la même loi, il en est de même de $g(U)$ et de $g(1-U)$. En particulier, on a $E(g(U)) = E(g(1-U)) = J$, et par linéarité de l'espérance :

$$E(Y) = \frac{1}{2}(E(g(U)) + E(g(1-U))) = \frac{1}{2}(2J) \boxed{= J.}$$

5. (a) Supposons $u \leq w$. On a $1-u \geq 1-w$, et par croissance de g :

$$g(u) \leq g(w) \text{ et } g(1-u) \geq g(1-w) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(g(u)-g(w))}_{\leq 0}\underbrace{(g(1-u)-g(1-w))}_{\geq 0} \leq 0.$$

L'autre cas $u > w$ se fait de même. Ainsi, on a bien pour tout $(u,w) \in [0,1]^2$ que :

$$\boxed{(g(u)-g(w))(g(1-u)-g(1-w)) \leq 0.}$$

(b) D'après la question précédente, la variable aléatoire $(g(U)-g(W))(g(1-U)-g(1-W))$ est négative ou nulle. Par croissance de l'espérance, son espérance est donc aussi négative ou nulle. Ainsi on a :

$$\boxed{E[(g(U)-g(W))(g(1-U)-g(1-W))]\leq 0.}$$

Développons $E[(g(U)-g(W))(g(1-U)-g(1-W))]$. On obtient :

$$E[g(U)g(1-U)-g(U)g(1-W)-g(W)g(1-U)+g(W)g(1-W)]$$
$$=E(g(U)g(1-U))-E(g(U)g(1-W))-E(g(W)g(1-U))+E(g(W)g(1-W))$$

Or les variables U et $1-W$ sont indépendantes et de même loi (par la question 1.), donc $g(U)$ et $g(1-W)$ le sont également, et on a :

$$E(g(U)g(1-W))=E(g(U))E(g(1-W))=E(g(U))^2$$

et de même $E(g(W)g(1-U))=E(g(U))^2$. Enfin, comme indiqué dans l'énoncé, les variables $g(U)g(1-U)$ et $g(W)g(1-W)$ sont de même loi et ont donc même espérance. On obtient finalement que :

$$\begin{aligned}E[(g(U)-g(W))(g(1-U)-g(1-W))]&=E(g(U)g(1-U))-E(g(U))^2-E(g(U))^2+E(g(U)g(1-U))\\&=2E(g(U)g(1-U))-2E(g(U))^2.\end{aligned}$$

Il vient donc que :

$$E[(g(U)-g(W))(g(1-U)-g(1-W))]\leq 0\quad\Rightarrow\quad\boxed{E[g(U)g(1-U)]\leq\left(E[g(U)]\right)^2.}$$

(c) On a par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}E(Y^2)&=\frac{1}{4}E\left((g(U)+g(1-U))^2\right)=\frac{1}{4}\left[E(g(U)^2)+E(g(1-U)^2)+2E(g(U)g(1-U))\right]\\&=\frac{1}{2}\left[E(g(U)^2)+E(g(U)g(1-U))\right]\end{aligned}$$

en notant pour la dernière égalité que $E(g(U)^2)=E(g(1-U)^2)$ puisque U et $1-U$ sont de même loi. Par la formule de Huygens, on obtient :

$$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=\frac{1}{2}\left[E(g(U)^2)+E(g(U)g(1-U))-2(E(g(U))^2\right].$$

D'autre part, on a $V(g(U))=E(g(U)^2)-E(g(U))^2$, et donc avec la question précédente :

$$V(Y)\leq\frac{1}{2}\left[E(g(U)^2)+E(g(U))^2-2(E(g(U))^2\right]=\frac{1}{2}\left[E(g(U)^2)-E(g(U))^2\right]\boxed{=\frac{1}{2}V(g(U)).}$$

6. On reprend le raisonnement effectué à la question 2.(b).ii. en remplaçant S_n par :

$$S_n'=\sum_{i=1}^{n}(g(U_i)+g(1-U_i))$$

et donc les σ par $\sigma'=\sqrt{V(Y)}$. On obtient alors comme intervalle de confiance de J au niveau de confiance 95% l'intervalle :

$$\boxed{\left[\frac{S_n'}{n}-1.96\times\frac{\sigma'}{\sqrt{n}};\frac{S_n'}{n}+1.96\times\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}\right].}$$

Pour un échantillon de taille n, la longueur de cet intervalle est $\ell'_n = 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, alors qu'elle est égale à $\ell_n = 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ pour l'intervalle obtenu à la question 2.(b).ii.

La question posée alors est la suivante : à n fixé, combien doit valoir N pour que $\ell'_N \leq \ell_n$? On est amené à résoudre l'inéquation suivante :

$$\ell'_N \leq \ell_n \Leftrightarrow \frac{\sigma'}{\sqrt{N}} \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{N} \leq \sqrt{n}\frac{\sigma'}{\sigma}.$$

En utilisant le résultat de la question 5.(c), on a $\sigma'^2 \leq \frac{\sigma^2}{2}$, et donc $\frac{\sigma'}{\sigma} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi, si on a $\sqrt{N} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$, on a bien $\sqrt{N} \geq \sqrt{n}\frac{\sigma'}{\sigma}$, et donc $\ell'_N \leq \ell_n$. Il suffit donc de prendre $\boxed{N \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1.}$

III. Réduction de la variance par stratification.

7. (a) Les fonctions :

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto 4x_1, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_2, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto 9x_3$$

sont polynomiales donc $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[^3$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction inverse étant $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit par composition et par somme de fonctions $\mathscr{C}^2$ que f est $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[^3$. De plus, on a :

$$\boxed{\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{1}{4x_1^2}, -\frac{1}{x_2^2}, -\frac{1}{9x_3^2}\right).}$$

On a de plus :

$$\boxed{\partial^2_{1,1} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2x_1^3}, \quad \partial^2_{2,2} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{x_2^3}, \quad \partial^2_{3,3} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{9x_3^3}}$$

et $\boxed{\partial^2_{i,j} f(x_1, x_2, x_3) = 0 \text{ pour tout } i \neq j.}$

(b) D'après les calculs précédents, on a :

$$\nabla^2 f(a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{a_2^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9a_3^3} \end{pmatrix}.$$

Pour tout $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ non nul, on a :

$${}^tH\nabla^2(f)(A)H = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{h_1}{2a_1^3} \\ \frac{2h_2}{a_2^3} \\ \frac{2h_3}{9a_3^3} \end{pmatrix} = \frac{h_1^2}{2a_1^3} + \frac{2h_2^2}{a_2^3} + \frac{2h_3^2}{9a_3^3} \boxed{> 0.}$$

Autre méthode. $\nabla^2 f(a_1, a_2, a_3)$ étant triangulaire supérieure (même diagonale), ses valeurs propres sont sur sa diagonale. Elles sont en l'occurrence toutes strictement positives. Par le cours, on a donc que pour tout $h \neq 0$, $q_A(h) > 0$.

(c) (a_1, a_2, a_3) est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$.
Or nous avons calculé précédemment le gradient de f, qui ne peut s'annuler sur $]0, +\infty[^3$. Donc f n'admet aucun point critique sur $]0, +\infty[^3$, et donc n'admet $\boxed{\text{pas d'extremum locaux.}}$

(d) i. (a_1, a_2, a_3) est un point critique de f sous la contrainte (linéaire) $x_1 + x_2 + x_3 = 110$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 110 \\ \nabla f(a_1, a_2, a_3) = \lambda(1, 1, 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 110 \\ -\dfrac{1}{4a_1^2} = \lambda \\ -\dfrac{1}{a_2^2} = \lambda \\ -\dfrac{1}{9a_3^2} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 110 \\ 4a_1^2 = a_2^2 = 9a_3^2 = -\dfrac{1}{\lambda} \end{cases}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{a_1, a_2, a_3 > 0} \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 110 \\ 2a_1 = a_2 = 3a_3 \left(= \sqrt{-\dfrac{1}{\lambda}} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 60 \\ a_1 = 30 \\ a_3 = 20 \\ \left(\sqrt{-\dfrac{1}{\lambda}} = 60 \right) \end{cases}$$

$\boxed{f \text{ admet un unique point critique sous la contrainte } \mathscr{C}, \text{ qui est } (30, 60, 20).}$

ii. Puisque f est de classe $\mathscr{C}^2$, on sait par le cours que g est de classe $\mathscr{C}^2$ entre 0 et 1, et on a :

$$\forall t \in [0, 1], \quad g'(t) = \langle \nabla f(a + th), h \rangle \quad \text{et} \quad g''(t) = q_{a+th}(h).$$

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction g entre 0 et 1, on a :

$$g(1) = g(0) + g'(0)\frac{(1-0)^1}{1!} + \int_0^1 g''(t)\frac{(1-t)}{1!}\mathrm{d}t.$$

soit :

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \int_0^1 q_{a+uh}(h)(1-t)\mathrm{d}t.$$

Or, a est un point critique sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$, donc $\nabla f(a)$ est orthogonal à $\mathscr{H} = \{(h_1, h_2, h_3),\ h_1 + h_2 + h_3 = 0\}$. Puisque $h = x - a \in \mathscr{H}$, on obtient :

$$f(x) - f(a) = \underbrace{\langle \nabla f(a), h \rangle}_{=0} + \int_0^1 q_{a+uh}(h)(1-t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \underbrace{q_{a+uh}(h)(1-t)}_{\geq 0 \text{ d'après } 7.(b)}\mathrm{d}t \geq 0.$$

Ainsi, on a $\boxed{f(x) \geq f(a)}$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathscr{C}$, f admet un minimum global en a sous la contrainte $\mathscr{C}$.

8. **Méthode de stratification.**

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$. On définit les trois intervalles I_1, I_2 et I_3 par

$$I_1 = [0, a[, \quad I_2 = [a, b[, \quad I_3 = [b, 1],$$

et on considère quatre variables aléatoires indépendantes U_1, U_2, U_3 et T, de lois uniformes respectivement sur I_1, I_2, I_3 et $[0, 1]$.

On définit la variable aléatoire $\tilde{U}$ par $\tilde{U} = U_1 \mathbb{1}_{[T \in I_1]} + U_2 \mathbb{1}_{[T \in I_2]} + U_3 \mathbb{1}_{[T \in I_3]}$ où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice d'un événement A. U est donc la variable aléatoire définie, pour tout élément ω de l'univers Ω par :

$$\tilde{U}(\omega) = \begin{cases} U_1(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_1 \\ U_2(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_2 \\ U_3(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_3 \end{cases}$$

(a) $([T \in I_i])_{i=1,2,3}$ est un système complet d'évènements (car les intervalles I_1, I_2, I_3 forment une partition de $[0,1]$ et que $T(\Omega) = [0,1]$). À l'aide de la formule des probabilités totales, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(g(\tilde{U}) \leq x) = \sum_{i=1}^{3} P(T \in I_i) P_{[T \in I_i]}(g(\tilde{U}) \leq x)$$

Or T suit une loi uniforme sur $[0,1]$, de sorte que :

$$P(T \in I_1) = P(0 \leq T < a) = a, \quad P(T \in I_2) = b - a, \quad P(T \in I_3) = 1 - b.$$

De plus pour $i = 1,2,3$, la loi de $g(\tilde{U})$ sachant $[T \in I_i]$ est la loi de $g(U_i)$, donc on a $P_{[T \in I_i]}(g(\tilde{U}) \leq x) = P = (g(U_i) \leq x)$. On obtient donc :

$$\boxed{P(g(\tilde{U}) \leq x) = aP(g(U_1) \leq x) + (b-a)P(g(U_2) \leq x) + (1-b)P(g(U_3) \leq x).}$$

Si $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$ sont des variables à densité, alors leurs fonctions de répartition sont continues sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Et donc :

$$x \mapsto F_{g(\tilde{U})}(x) = aF_{g(U_1)}(x) + (b-a)F_{g(U_2)}(x) + (1-b)F_{g(U_3)}(x)$$

est également continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points. On en déduit que $\boxed{g(\tilde{U}) \text{ est une variable à densité.}}$

Si on dérive cette expression là où elle est dérivable (c'est-à-dire sauf éventuellement en un nombre fini de points), il vient :

$$F'_{g(\tilde{U})}(x) = af_{g(U_1)}(x) + (b-a)f_{g(U_2)}(x) + (1-b)f_{g(U_3)}(x).$$

Puisqu'il est toujours possible de choisir arbitrairement la valeur d'une densité de $g(\tilde{U})$ là où $F_{g(\tilde{U})}$ n'est pas dérivable, on peut prendre pour densité de $g(\tilde{U})$ la fonction :

$$\boxed{f_{g(\tilde{U})}(t) = af_{g(U_1)}(t) + (b-a)f_{g(U_2)}(t) + (1-b)f_{g(U_3)}(t).}$$

En particulier, si g est la fonction identité, alors les variables $g(U_1)$, $g(U_2)$ et $g(U_3)$ suivent des lois uniformes sur respectivement $[0,a[$, $[a,b[$ et $[b,1[$. On peut alors prendre comme densités respectives de U_1, U_2, U_3 les fonctions :

$$f_{U_1} : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } t \in [0,a[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad f_{U_2} : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a,b[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad f_{U_3} : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{1-b} & \text{si } t \in [b,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Dans ce cas, on a :

$$f_{\tilde{U}} : t \mapsto \begin{cases} a\frac{1}{a} & \text{si } 0 \leq t < a \\ (b-a)\frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq t < b \\ (1-b)\frac{1}{1-b} & \text{si } b \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On reconnait la densité d'une loi uniforme sur $[0,1]$, donc $\boxed{\tilde{U} \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1]).}$

(b) Les variables $g(U_i)$ possèdent une espérance pour les mêmes raisons qu'à la question 1.a., donc les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf_{g(U_i)}(t)\,\mathrm{d}t$ convergent absolument et valent $E(g(U_i))$ pour $i = 1,2,3$. Par inégalité triangulaire, on a que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|tf_{g(\tilde{U})}(t)\right| \leq a|t|f_{g(U_1)}(t) + (b-a)|t|f_{g(U_2)}(t) + (1-b)|t|f_{g(U_3)}(t).$$

Par théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(\tilde{U})}(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument. Donc $E(g(\tilde{U})$ existe bien et on a (par linéarité de l'intégrale, puisque tout converge) :

$$\begin{aligned} E(g(\tilde{U}) &= a\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_1)}(t)\,\mathrm{d}t + (b-a)\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_2)}(t)\,\mathrm{d}t + (1-b)\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_3)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &\boxed{= aE(g(U_1)) + (b-a)E(g(U_2)) + (1-b)E(g(U_3)).} \end{aligned}$$

(c) Les $U_{i,j}$ étant mutuellement indépendantes, il en est de même des $g(U_{i,j})$ par lemme de coalition. Et donc :

$$V(Z) = a^2\frac{1}{n_1^2}\sum_{j=1}^{n_1} V(g(U_{1,j})) + (b-a)^2\frac{1}{n_2^2}\sum_{j=1}^{n_2} V(g(U_{2,j})) + (1-b)^2\frac{1}{n_3^2}\sum_{j=1}^{n_3} V(g(U_{3,j})).$$

Mais pour tout $i = 1,2,3$ et $j \in [\![1, n_i]\!]$, $g(U_{i,j})$ a même loi que $g(U_i)$ et donc :

$$\sum_{j=1}^{n_i} V(g(U_{i,j})) = n_i V(g(U_i)).$$

On obtient donc :

$$\boxed{V(Z) = a^2\frac{1}{n_1}V\big(g(U_1)\big) + (b-a)^2\frac{1}{n_2}V\big(g(U_2)\big) + (1-b)^2\frac{1}{n_3}V\big(g(U_3)\big)}$$

(d) On cherche n_1, n_2, n_3 minimisant le risque quadratique de Z (afin qu'une valeur prise par Z fournisse une estimation de J avec le plus petit risque d'erreur possible). Notons pour cela que :

$$\begin{aligned} E(Z) &= a\frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} E(g(U_{1,j})) + (b-a)\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} E(g(U_{2,j})) + (1-b)\frac{1}{n_3}\sum_{j=1}^{n_3} E(g(U_{3,j})) \\ &= aE(g(U_1)) + (b-a)E(g(U_2) + (1-b)E(g(U_3)) \overset{8.(b)}{=} E(g(\tilde{U}) \overset{1.(b)}{=} J \end{aligned}$$

car $\tilde{U}$ suit une loi $\mathscr{U}([0,1])$ d'après la question 8.(a). Ainsi, Z est un estimateur sans biais de J, de sorte que son risque quadratique est égal à sa variance.

Cette variance vaut donc ici $V(Z) = \dfrac{1}{4n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{9n_3}$. Puisque l'on tire 110 points, il faut donc avoir $n_1 + n_2 + n_3 = 110$. Par le résultat de la question 7.(d), la valeur de $V(Z)$ est alors minimale pour $\boxed{n_1 = 30,\ n_2 = 60 \text{ et } n_3 = 20.}$