DM15

Devoir maison de révisions type Ecricome

Exercice 1

On définit la suite des polynômes de Tchebychev par $T_0 = 1,\ T_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

On rappelle que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

1. (a) Expliciter T_2 et T_3.
   (b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de T_n.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\cos\left((n+2)x\right) + \cos\left(nx\right) = 2\cos\left(x\right)\cos\left((n+1)x\right).$$
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:
   $$T_n(\cos x) = \cos(nx).$$
3. (a) Montrer que pour tout couple $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
   (b) Montrer que l'application :
   $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \end{array}$$
   définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
   On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ce produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.
   (c) Montrer que si n et m sont deux entiers naturels distincts, alors $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0$.
   (d) Montrer que si n et m sont deux entiers naturels distincts, $\langle T_n, T_m \rangle = 0$.
   Indication. On pourra procéder au changement de variable $t = \cos(x)$ après avoir justifié sa validité.
   (e) Montrer que :
   $$\|T_n\|^2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n \geq 1, \\ \pi & \text{si } n = 0. \end{cases}$$
   (f) En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
4. Soit n un entier non nul. On définit d_n la distance de X^n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par :
   $$d_n = \inf\left\{\|X^n - P\|, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\right\}$$
   (a) Justifier que : $X^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \langle X^n, T_k \rangle \dfrac{T_k}{\|T_k\|^2}$.
   (b) Montrer alors que : $d_n = \dfrac{|\langle X^n, T_n \rangle|}{\|T_n\|}$.
   (c) Déterminer en particulier la valeur de d_2.

Exercice 2

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note $F(x)$ sa somme.

   (b) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

2. Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n'(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.

3. **Étude de la dérivabilité de F.**

   (a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $(x, x_0) \in [n, +\infty[^2$, on a :
   $$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{n^3}.$$

   (b) En déduire, pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}_+$, la nature de la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$.

   (c) Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}_+$, on ait :
   $$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq K|h|.$$

   (d) En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $F' = G$.

4. **Recherche d'un équivalent en $+\infty$.**
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

   (a) Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$f_{k+1}(x) \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) \mathrm{d}t \leq f_k(x).$$

   (b) En déduire que, pour tout $n \geq 2$, on a :
   $$\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) \mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) \mathrm{d}t.$$

   (c) En déduire que :
   $$\ln(1+x) \leq F(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).$$

   (d) Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Problème.

L'objet du problème est la présentation d'une méthode probabiliste de calcul d'une intégrale (méthode de Monte-Carlo) et de deux façons de l'améliorer.
Dans tout le problème, U désigne une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, g une fonction continue sur $[0,1]$ et on pose $J = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$.

L'espérance d'une variable aléatoire X sera notée $E(X)$ et sa variance $V(X)$ (si elles existent).
On admet que, pour tout entier naturel non nul n, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires à densités, mutuellement indépendantes, alors des variables aléatoires de la forme $f_1(X_1),\ f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ où les f_i sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, distinctes ou non, sont également mutuellement indépendantes.

I. Méthode de Monte-Carlo

1. (a) Rappeler une densité de U.
   (b) Justifier que la variable aléatoire $g(U)$ admet une espérance égale à J.

2. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U.

   On suppose $\sigma^2 = V\big(g(U)\big) \neq 0$ et on note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} g(U_i)$.

   (a) Justifier que la suite de variables aléatoires $(\dfrac{S_n}{n})$ converge en probabilité vers J.
   (b) *Recherche d'un intervalle de confiance pour J.*
      i. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.
      ii. On donne $\Phi(1.96) = 0.975$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
      Déterminer un intervalle de confiance asymptotique pour J, au niveau de confiance 95%, faisant intervenir S_n.

3. *Application.*

   (a) À l'aide du changement de variable $t = \sin u$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \pi$.
   (b) i. Écrire, en `Scilab` une fonction `G`, de paramètre `t`, qui pour une valeur t du paramètre renvoie la valeur $4\sqrt{1-t^2}$.
      ii. On rappelle qu'en `Scilab`, la fonction `rand()` permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.
      On suppose que `n` est un entier préalablement entré dans `Scilab`. En utilisant le résultat de la question 2.(a) et la fonction `G`, compléter le programme suivant, de manière à ce qu'il calcule une valeur approchée de π.

```
J = 0 ;
for i = 1:n
            ....
end
J = ....
```

II. Réduction de la variance par variables antithétiques.

4. Reconnaître la loi de $1 - U$.

   On définit la variable aléatoire Y par $Y = \dfrac{1}{2}[g(U) + g(1-U)]$. Que vaut $E(Y)$?

5. On suppose g strictement croissante et on admet l'existence des espérances intervenant dans cette question.

   (a) Justifier que, pour tout $(u, w) \in [0,1]^2$,

$$\big(g(u) - g(w)\big)\big(g(1-u) - g(1-w)\big) \leq 0.$$

(b) Soit W une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendante de U. Quel est le signe de $E[(g(U)-g(W))(g(1-U)-g(1-W))]$?
En remarquant que $g(U)g(1-U)$ et $g(W)g(1-W)$ ont même espérance, en déduire que :

$$E[g(U)g(1-U)] \leq (E[g(U)])^2$$

On admet que l'on obtiendrait le même résultat pour g strictement décroissante.

(c) Montrer alors que, lorsque g est strictement monotone, $V(Y) \leq \dfrac{1}{2}V(g(U))$.

6. Donner un nouvel intervalle de confiance pour J au niveau de confiance 95%, basé sur cette méthode.

   On note ℓ_n la longueur de l'intervalle de confiance obtenu dans la partie I pour une valeur fixée de n.

   Avec cette nouvelle méthode, combien de tirages N de la variable aléatoire uniforme suffit-il de faire pour obtenir la même longueur ℓ_n d'intervalle de confiance ?

III. Réduction de la variance par stratification.

7. **Étude d'une fonction de plusieurs variables.**

   On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[^3$ par $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{1}{4x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{9x_3}$.

   (a) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[^3$. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

   (b) On note $\nabla^2(f)(A) = \left[\partial^2_{i,j}(f)(A)\right]_{1\leq i,j\leq 3}$ la matrice hessienne de f en $A=(a_1,a_2,a_3)$.
   Justifier que, pour tout $A \in]0,+\infty[^3$, pour toute matrice colonne H à trois lignes, non nulle, on a :

   $$^t H \nabla^2(f)(A) H > 0.$$

   (c) f admet-elle des extrema sur $]0,+\infty[^3$?

   (d) On cherche désormais les extrema de f sous la contrainte $\mathscr{C}$: $x_1+x_2+x_3 = 110$.

      i. Montrer que f admet un unique point critique a sous cette contrainte, que l'on déterminera.

      ii. On souhaite montrer que f admet est un extremum global a sous la contrainte $\mathscr{C}$. Pour cela on considère $x \in \mathscr{C}$ et on note alors $h = x-a$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(t) = f(a+th)$.
      En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction g, montrer que $f(x) \geq f(a)$. Conclure.

8. **Méthode de stratification.**

   Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$. On définit les trois intervalles I_1, I_2 et I_3 par

   $$I_1 = [0,a[, \quad I_2 = [a,b[, \quad I_3 = [b,1],$$

   et on considère quatre variables aléatoires indépendantes U_1, U_2, U_3 et T, de lois uniformes respectivement sur I_1, I_2, I_3 et $[0,1]$.

   On définit la variable aléatoire $\tilde{U}$ par $\tilde{U} = U_1 \mathbb{1}_{[T\in I_1]} + U_2 \mathbb{1}_{[T\in I_2]} + U_3 \mathbb{1}_{[T\in I_3]}$ où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice d'un événement A. $\tilde{U}$ est donc la variable aléatoire définie, pour tout élément ω de l'univers Ω par :

   $$\tilde{U}(\omega) = \begin{cases} U_1(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_1 \\ U_2(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_2 \\ U_3(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_3 \end{cases}$$

(a) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout réel x,

$$P\big(g(\tilde{U}) \leq x\big) = aP\big(g(U_1) \leq x\big) + (b-a)P\big(g(U_2) \leq x\big) + (1-b)P\big(g(U_3) \leq x\big).$$

En admettant que $g(U_2)$, $g(U_2)$, $g(U_3)$ sont des variables aléatoires à densité, montrer que $g(\tilde{U})$ est elle-même une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité $f_{g(\tilde{U})}$ en fonction de densités de $g(U_1)$, $g(U_2)$, $g(U_3)$, que l'on pourra noter $f_{g(U_1)}$, $f_{g(U_2)}$, $f_{g(U_3)}$.
Vérifier, en prenant la fonction identité pour g, que $\tilde{U}$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

(b) Déduire de ce qui précède que :

$$E\big(g(\tilde{U})\big) = aE\big(g(U_1)\big) + (b-a)E\big(g(U_2)\big) + (1-b)E\big(g(U_3)\big).$$

(c) On tire de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles, n_1 points dans I_1, n_2 points dans I_2, n_3 points dans I_3. On considère donc la famille de variables aléatoires indépendantes $(U_{1,1},\dots,U_{1,n_1},U_{2,1},\dots,U_{2,n_2},U_{3,1},\dots,U_{3,n_3})$ telles que :

- $U_{1,1},\dots,U_{1,n_1}$ ont même loi que U_1,
- $U_{2,1},\dots,U_{2,n_2}$ ont même loi que U_2,
- $U_{3,1},\dots,U_{3,n_3}$ ont même loi que U_3,

et on note Z la variable aléatoire définie par :

$$Z = a\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} g(U_{1,i}) + (b-a)\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} g(U_{2,j}) + (1-b)\frac{1}{n_3}\sum_{k=1}^{n_3} g(U_{3,k})$$

Montrer que :

$$V(Z) = a^2\frac{1}{n_1}V\big(g(U_1)\big) + (b-a)^2\frac{1}{n_2}V\big(g(U_2)\big) + (1-b)^2\frac{1}{n_3}V\big(g(U_3)\big)$$

(d) *Application numérique.*
On suppose que, pour un certain choix de la fonction g et des réels a et b, on a :

$$a^2V\big(g(U_1)\big) = \frac{1}{4}, \quad (b-a)^2V\big(g(U_2)\big) = 1, \quad (1-b)^2V\big(g(U_3)\big) = \frac{1}{9}.$$

On suppose que l'on tire 110 points, de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles (n_1 points dans I_1, n_2 points dans I_2, n_3 points dans I_3). Quelles valeurs faut-il donner à n_1, n_2, n_3 pour qu'une valeur prise par Z fournisse une estimation de J avec le plus petit risque d'erreur possible suivant cette méthode ?
