

DM2

## Devoir maison type parisiennes à rendre le 23/09/2019

Les parties I et II de ce devoir maison sont obligatoires pour le groupe de Maths C. Ce devoir est facultatif pour le groupe de Maths D.

### Notations et objectifs.

Dans tout le problème,  $E$  désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment  $[0, 1]$  et à valeurs réelles.

Sous réserve d'existence, on note  $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$  et  $\psi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x}{n^2 - x^2}$ .

Le but du problème est d'obtenir, à l'aide des fonctions  $\varphi$  et  $\psi$ , des expressions des fonctions  $\sin$ ,  $\frac{1}{\sin}$  et  $\frac{\cos}{\sin}$  comme somme de séries ou produit infini (on parle de développements eulériens).

Plus précisément, dans la partie I, on étudie les premières propriétés de la fonction  $\varphi$  ; dans la seconde partie, on introduit et on étudie l'opérateur  $T$  défini sur  $E$  par :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0, 1], \quad [T(f)](x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

On en déduit une expression de la fonction  $\frac{\cos}{\sin}$  puis, dans la partie III, de la fonction sinus. Enfin, dans la partie IV, l'étude de la fonction  $\psi$  permet d'obtenir une expression de  $\frac{1}{\sin}$ .

### Partie I : Étude de la fonction $\varphi$ .

1. Montrer que, pour tout nombre réel  $x$  qui n'est pas un entier relatif, la série de terme général  $u_n(x) = \frac{2x}{n^2 - x^2}$  est convergente.

Dans la suite, on notera  $D$  l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des entiers relatifs. La fonction  $\varphi$  est donc définie sur  $D$ .

2. Imparité et périodicité de  $\varphi$  :

(a) Justifier que  $\varphi$  est impaire.

(b) Vérifier que pour  $x$  dans  $D$  :  $\frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}$ .

(c) Montrer que pour  $x$  dans  $D$  :  $\varphi(x+1) = \varphi(x)$ .  
La fonction  $\varphi$  est donc périodique de période 1.

3. Continuité de  $\varphi$  :

(a) Justifier pour  $x$  dans l'ensemble  $D \cup \{0, 1\}$ , l'existence de

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right)$$

(b) Vérifier que :  $\forall x \in D, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x)$ .

(c) Soit  $h$  un nombre réel de  $\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$ , montrer que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad |g(x+h) - g(x)| \leq C|h|$$

où  $C = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)\left(n - \frac{3}{2}\right)}$ .

- (d) En déduire que  $g$  est continue sur  $[0, 1]$  puis que  $\varphi$  est continue sur  $]0, 1[$ .  
La fonction  $\varphi$  est donc continue sur  $D$ .

4. Étude de  $\varphi$  en 0 et en 1 :

- (a) Montrer que  $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$  et que :  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \varphi(x) - \frac{1}{x} \right) = 0$ .  
(b) Obtenir des résultats similaires lorsque  $x$  tend vers 1.

## Partie II : Étude de l'opérateur $T$ .

On rappelle que  $E$  désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment  $[0, 1]$  et à valeurs réelles.

$T$  est l'application définie sur  $E$  par :  $\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], [T(f)](x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$ .

On note, pour tout entier naturel  $k$ ,  $e_k$  l'élément de  $E$  défini par :  $\forall x \in [0, 1], e_k(x) = x^k$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $F_n$  le sous-espace vectoriel de  $E$  dont une base est  $B_n = (e_k)_{k \in [0, n]}$ .

1. Vérifier que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

2. Étude de  $T$  sur  $F_n$  :

- (a) Vérifier que  $\forall f \in F_n, T(f) \in F_n$ .  
On note  $T_n$  l'endomorphisme de  $F_n$  défini par  $\forall f \in F_n, T_n(f) = T(f)$ .  
(b) Déterminer la matrice de  $T_n$  dans la base  $B_n$ .  
(c) (Cubes) Quelles sont les valeurs propres de  $T_n$  ?  $T_n$  est-il diagonalisable ?

3. Étude du noyau de l'endomorphisme  $(T - 2 \text{id}_E)$  :

- (a) Montrer que  $\text{Ker}(T - 2 \text{id}_E)$  n'est pas réduit à  $\{0_E\}$ .  
Soit  $f$  un élément de  $\text{Ker}(T - 2 \text{id}_E)$ . On note  $m = \min_{x \in [0, 1]} f(x)$  et  $M = \max_{x \in [0, 1]} f(x)$ . On fixe  $x_0$  dans  $[0, 1]$  tel que  $m = f(x_0)$  et  $x_1$  dans  $[0, 1]$  tel que  $M = f(x_1)$ .  
(b) Montrer que  $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = m$ .  
(c) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$ .  
(d) En déduire que  $m = f(0)$ .  
(e) Faire une étude similaire pour  $M$ .  
(f) Montrer alors que  $f$  est constante.

4. Étude de la fonction cot :

Pour tout  $x$  dans l'ensemble  $D$ , on note  $\cot(x) = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$ .

- (a) Vérifier que cot est définie et continue sur  $D$ , qu'elle est impaire et périodique de période 1.  
(b) Montrer que  $\cot(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$  et que  $\cot(x) - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi^2}{3}x$ .  
(c) Obtenir des résultats similaires lorsque  $x$  tend vers 1.  
(d) Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$  dans  $D$ , on a :  $\frac{x}{2} \in D, \frac{x+1}{2} \in D$  et

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\cot(x)$$

5. Calcul de  $\varphi$  :

- (a) Vérifier que, pour tout nombre réel  $x$  dans  $D$ ,  $\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x)$ .  
(b) Montrer que  $\varphi - \cot$  se prolonge par continuité sur  $[0, 1]$ .  
(c) Démontrer alors que  $\varphi = \cot$ .

Autrement dit :  $\forall x \in D, \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$ .

6. Première application :

(a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x \cot(x)}{2x^2}$ .

Pour tout nombre réel  $x$  dans  $]0, 1[$ , on pose  $\delta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

(b) Vérifier que  $\left| \delta(x) - \frac{x^2}{1 - x^2} \right| \leq x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - 1)}$ .

(c) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

(d) Déterminer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

### Partie III : Développement eulérien de la fonction sinus.

Pour tout  $n$  entier naturel non nul et tout nombre réel  $x$  dans  $[0, 1[$ , on pose  $\alpha_n(x) = \ln \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$  et  $\beta_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(x)$ .

1. Montrer que, pour tout nombre réel  $x$  dans  $[0, 1[$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \alpha_n(x)$  converge. On note alors

$$\beta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(x).$$

2. Explicitation de  $\beta$  : on fixe un nombre réel  $x$  dans  $]0, 1[$ .

(a) Pour  $N$  entier naturel non nul, calculer  $\int_0^x \left( \sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} \right) dt$  en fonction de  $\beta_N(x)$ .

(b) Justifier l'existence de  $\int_0^x \left( \varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt$ .

(c) Montrer que  $\left| \int_0^x \left( \varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt - \int_0^x \left( \sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} \right) dt \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$ .

(d) En déduire que :  $\beta(x) = \int_0^x \left( \varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt$ .

(e) Montrer alors que, pour tout nombre réel  $x$  dans  $]0, 1[$ ,  $\beta(x) = \ln \left( \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)$ .

3. Pour tout nombre réel  $x$  et pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose  $P_n(x) = \pi x \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{x^2}{k^2} \right)$ .

(a) Montrer que, pour tout nombre réel  $x$  de  $[0, 1[$ , la suite  $(P_n(x))_{n \geq 1}$  est convergente.

Dans la suite, on pose  $P(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$  et on note :  $P(x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$ .

(b) Vérifier que, pour tout nombre réel  $x$  de  $[0, 1[$ ,  $P(x) = \pi x \exp(\beta(x)) = \sin(\pi x)$ .

(c) Montrer que la suite  $(P_n(x))_{n \geq 1}$  est en fait convergente pour tout nombre réel  $x$ . On note encore  $P(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$ .

(d) Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $x$  un nombre réel dans  $] -n, n[$ , montrer que

$$P_n(x+1) = - \left( \frac{n+1+x}{n-x} \right) P_n(x).$$

(e) En déduire que, pour tout nombre réel  $x$  :  $P(x+1) = -P(x)$ . Vérifier alors que  $P$  est 2-périodique sur  $\mathbb{R}$ .

(f) Montrer alors que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $P(x) = \sin(\pi x)$ .

Finalement, on obtient ainsi :  $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$ .

## Partie IV : Un autre développement du sinus.

Dans cette partie, pour tout entier naturel non nul  $n$  et pour tout nombre réel  $x$  dans  $D \cup \{0\}$ , on pose  $\lambda_n(x) = \int_0^\pi \cos(xt) \cos(nt) dt$  et  $\nu_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x}{n^2 - x^2}$ .

1. Montrer que pour tout nombre réel  $x$  dans  $D \cup \{0\}$ , la série de terme général  $\nu_n(x)$  est convergente.

La fonction  $\psi$  est donc définie sur  $D \cup \{0\}$ .

2. Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$  et pour tout nombre réel  $x$  dans  $D \cup \{0\}$ ,

$$\lambda_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x \sin(\pi x)}{n^2 - x^2} = \sin(\pi x) \nu_n(x). \text{ Pour cela, on pourra utiliser sans la démontrer la formule trigonométrique } \cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b)).$$

3. Pour tout nombre réel  $t$  et tout entier naturel non nul  $n$ , on pose  $C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt)$ .

(a) Vérifier que lorsque  $t$  n'est pas de la forme  $2p\pi$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ .

- (b) Expliciter  $C_n(t)$  lorsque  $t$  s'écrit  $2p\pi$  avec  $p$  dans  $\mathbb{Z}$ .

(c) Donner la valeur de  $I_n = \int_0^\pi C_n(t) dt$ .

4. Soit  $F$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $[0, \pi]$ , montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_0^\pi F(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) dt \right) = 0.$$

5. Pour  $x$  élément de  $D$ , on définit la fonction  $\Phi_x$  sur  $[0, \pi]$  par :

$$\Phi_x(t) = \begin{cases} \frac{\cos(xt) - 1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in ]0, \pi] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

- (a) Montrer que  $\Phi_x$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, \pi]$ .

- (b) Vérifier que :

$$\forall t \in [0, \pi], C_n(t) (\cos(xt) - 1) = -\frac{1}{2} (\cos(xt) - 1) + \frac{1}{2} \Phi_x(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right).$$

- (c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in D, \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \Phi_x(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) dt + I_n.$$

6. Application.

- (a) Démontrer, à l'aide des questions précédentes que, pour tout  $x$  élément de  $D$ ,

$$\psi(x) \sin(\pi x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2}.$$

- (b) En déduire que, pour tout  $x$  élément de  $D$ ,  $\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - x^2}$ .