DM3

Devoir maison à rendre le 07/10/2019

Partie I : la loi hypergéométrique.

Soient a, b deux entiers strictement positifs, et $k \in [\![1, \min(a,b)]\!]$. On considère une urne contenant a boules blanches et b boules noires, dans laquelle on effectue k tirages successifs sans remise. On note S_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours de ces k tirages.

1. Déterminer $S_k(\Omega)$.

2. Montrer que pour tout $i \in S_k(\Omega)$, on a
$$P(S_k = i) = \frac{\binom{a}{i}\binom{b}{k-i}}{\binom{a+b}{k}}.$$
Indication : on pourra dénombrer les tirages réalisant l'évènement $[S_k = i]$.

   On dit alors que S_k suit *la loi hypergéométrique de paramètres* k, a, b, notée $\mathscr{H}(k, a, b)$.

3. Si $k = 1$, reconnaître la loi de S_1 et préciser son espérance.

4. Justifier que S_k admet une espérance.

5. Le but de cette question est de montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ la propriété suivante, notée P_k : « quels que soient $(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $k \leq \min(n_1, n_2)$, si $X \hookrightarrow \mathscr{H}(k, n_1, n_2)$, alors $E(X) = k\dfrac{n_1}{n_1 + n_2}$ ».
   (a) Montrer que P_1 est vraie.
   (b) On suppose à présent que P_k est vraie pour un certain entier $k \in \mathbb{N}^*$.
   Soit n_1, n_2 tels que $k + 1 \leq \min(n_1, n_2)$. On considère alors une urne contenant n_1 boules blanches et n_2 boules noires. On effectue alors une suite de $k + 1$ tirages sans remise dans cette urne, et on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i-ème boule tirée est blanche, et 0 sinon.
      i. Que représente $X_1 + \cdots + X_{k+1}$?
      ii. Déterminer la loi de X_1, ainsi que la loi de $X_1 + \cdots + X_{k+1}$.
      iii. Déterminer la loi de $X_2 + \cdots + X_{k+1}$ conditionnellement à l'évènement $[X_1 = 1]$. Même question pour l'évènement $[X_1 = 0]$.
      iv. À l'aide de la formule de l'espérance totale, déterminer $E(X_2 + \cdots + X_{k+1})$.
      v. En déduire $E(X_1 + \cdots + X_{k+1})$?
   (c) Conclure.

Partie II : variance de la loi hypergéométrique.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, et soient n_1, n_2 deux entiers tels que $k \leq \min(n_1, n_2)$ et soit X une variable aléatoire suivant la loi hypergéométrique $\mathscr{H}(k, n_1, n_2)$.

6. Montrer que X admet une variance.

7. En utilisant la question 2, montrer l'identité suivante, appelée *identité de Vandermonde* :
$$\forall k \in [\![0, \min(n_1, n_2)]\!], \quad \binom{n_1 + n_2}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i}.$$

8. Calculer $E(X(X-1))$.

9. En déduire les valeurs de $E(X^2)$, puis de $V(X)$.

Partie III : application.

Cette partie est facultative pour le groupe D.

Le programme d'un examen est constitué de N questions, dont n sont tirées au hasard pour constituer l'épreuve. L'examen se présente sous la forme d'un QCM : pour chaque question, 4 réponses sont proposées dont une seule est juste. Une réponse juste rapporte 1 point et une réponse fausse ne rapporte pas de points. Un candidat donné connaît les réponses à a questions (on suppose $n \leq a$ et $n \leq N - a$) parmi les N au programme.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de questions de l'examen dont le candidat connaît la réponse. Pour ces questions, le candidat donne la bonne réponse, pour les autres, il choisit au hasard une réponse parmi les quatre proposées.
On appelle Y la note obtenue par ce candidat.

10. Déterminer la loi de X.

11. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de $Y - X$ sachant l'évènement $[X = k]$ est réalisé. En déduire $E(Y - X|X = k)$.

12. Déterminer $E(Y)$. Pour quelles valeurs de a l'étudiant peut espérer avoir la moyenne ?