DM4

Correction du devoir maison

Exercice 1 (EDHEC 2016)

1. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f \circ (f - \mathrm{Id})^2 = 0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

   (a) On a :

$$(f - \mathrm{Id})^2 + f \circ (2\mathrm{Id} - f) = f^2 - 2f + \mathrm{Id} + 2f - f^2 \boxed{= \mathrm{Id}}$$

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a donc :

$$\boxed{x = (f - \mathrm{Id})^2(x) + (f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x).}$$

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$f((f - \mathrm{Id})^2(x)) = \underbrace{f \circ (f - \mathrm{Id})^2}_{=0_{\mathscr{L}(E)}}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

   par hypothèse. Donc $(f - \mathrm{Id})^2(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(f)$.

   D'autre part, on a :

$$(f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x) = f((2\mathrm{Id} - f)(x)) \in \mathrm{Im}(f).$$

   Ainsi d'après la question précédente, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x = \underbrace{(f - \mathrm{Id})^2(x)}_{\in \mathrm{Ker}(f)} + \underbrace{(f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x)}_{\in \mathrm{Im}(f)} \in \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f).$$

   Donc $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. Comme de plus on a $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$ par le théorème du rang, on peut donc conclure que :

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).}$$

2. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que : $f \circ (f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id}) = 0$.

   (a) Posons $P = aX + b$. On substitue dans l'expression :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}(X-1)(X-4) + XP(X) = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{4}(X^2 - 5X + 4) + aX^2 + bX = 1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} + a = 0 & \text{terme en } X^2 \\ -\frac{5}{4} + b = 0 & \text{terme en } X \\ 1 = 1 & \text{terme constant} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{5}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

   Ainsi le polynôme P recherché existe bien et vaut $\boxed{P = \frac{5 - X}{4}}$.

(b) On obtient donc :

$$\frac{1}{4}(f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id})+f\circ P(f)=\mathrm{Id}.$$

Ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, on a :

$$x=\frac{1}{4}(f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id})(x)+f\circ P(f)(x)$$

Or on a :

- $f\circ P(f)(x)=f\left(P(f)(x)\right)$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$;
- $f((f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id})(x))=\underbrace{f\circ(f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id})}_{=0_{\mathscr{L}(E)}}(x)=0$ donc $\frac{1}{4}(f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id})(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(f)$.

Ainsi, de même que précédemment, on obtient que $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)$. Comme de plus $\dim\mathbb{R}^n=\dim\mathrm{Ker}(f)+\dim\mathrm{Im}(f)$ par le théorème du rang, on en déduit que :

$$\boxed{\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f).}$$

3. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f, dont le degré est égal à p (avec $p\geq 2$), et tel que $P(0)=0$ et $P'(0)\neq 0$.

(a) P est de degré p, donc il existe $a_0,a_1,\dots,a_p\in\mathbb{R}$ tels que :

$$P=a_0+a_1X+\cdots+a_pX^p.$$

De plus on a $0=P(0)=a_0$ et $a_1=P'(0)\neq 0$. D'où le résultat.

(b) Soit $y\in\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)$. Puisque $y\in\mathrm{Im}(f)$, il existe $x\in\mathbb{R}^n$ tel que $y=f(x)$. On a alors :

$$0_{\mathbb{R}^n}=f(y)=f^2(x)$$

On en déduit alors que $f^k(x)=0_{\mathbb{R}^n}$ pour tout $k\geq 2$.

P est annulateur par hypothèse, donc on a :

$$a_1f+a_2f^2+\cdots+a_pf^p=0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}.$$

On évalue en x :

$$a_1f(x)+\underbrace{a_2f^2(x)+\cdots+a_pf^p(x)}_{=0_{\mathbb{R}^n}}=0_{\mathbb{R}^n}$$

Et donc on a $a_1y=0_{\mathbb{R}^n}$. Puisqu'enfin $a_1\neq 0$, on en déduit que $y=0_{\mathbb{R}^n}$. On peut donc conclure que $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)\subset\{0\}$. L'autre inclusion étant immédiate puisque $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel, on peut donc conclure que $\boxed{\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}}$.

Enfin, par le théorème du rang, on a $\dim\mathbb{R}^n=\dim\mathrm{Ker}(f)+\dim\mathrm{Im}(f)$. On obtient donc que :

$$\boxed{\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f).}$$

(c) Cette question généralise les deux précédentes car :

- Dans la question 1, le polynôme annulateur est $P=X(X-1)^2$.
- Dans la question 2, le polynôme annulateur est $P=X(X-1)(X-4)$.

Dans les deux cas, P satisfait $P(0)=0$ et $P'(0)\neq 0$. On est donc bien dans la situation de la question 3. En particulier, le résultat de la question 3 implique les résultats des questions 1 et 2.

Exercice 2

1. (a) Supposons f bijective. Par composition d'applications bijectives, on aurait alors $0_{\mathscr{L}(E)} = f^p$ qui serait bijective. Or ce n'est pas le cas, l'application nulle n'étant pas bijective lorsque $\dim(E) = n > 0$ (ce qu'on supposera dans la suite). Ainsi $\boxed{f \text{ n'est pas bijective}}$.

   (b) Puisque $f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, $\boxed{\text{il existe } x_0 \in E \text{ tel que } f^{p-1}(x_0) \neq 0_E}$ (puisque f^{p-1} n'est pas l'application nulle).

   Montrons que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre. Soit pour cela $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ des scalaires tels que :

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0_E.$$

   Montrons que $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0$. Composons pour cela cette égalité par f^{p-1}, on obtient (par linéarité de f^{p-1}) :

$$\lambda_0 f^{p-1}(x_0) + \underbrace{\lambda_1 f^p(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{2p-2}(x_0)}_{=0_E \text{ car } f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}} = 0_E,$$

   ce qu'on peut réécrire simplement donc $\lambda_0 f^{p-1}(x_0) = 0_E$. Puisque $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$, on obtient donc $\lambda_0 = 0$.

   En tenant compte de $\lambda_0 = 0$, on a maintenant :

$$\lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0_E.$$

   On procède alors de même que précédemment : on compose cette égalité par f^{p-2} à présent. On obtient l'égalité :

$$\lambda_1 f^{p-1}(x_0) + 0_E = 0_E.$$

   Puisque $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$, on obtient donc $\lambda_1 = 0$.

   En itérant ce procédé, on obtient de même $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$. On peut donc conclure que $\boxed{\text{la famille } (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)) \text{ est libre}}$.

   (c) La famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ étant libre, son cardinal est inférieur ou égal à la dimension de l'espace, soit $p \leq \dim(E) = n$. On en déduit que l'indice de nilpotence est inférieur à la dimension, et donc que $\boxed{f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}}$.

2. On suppose dans cette question que $p = n$. On propose deux méthodes pour obtenir le rang de f.

   - **Méthode 1.** On a $f^i(x_0) \in \mathrm{Im}(f)$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Donc $(f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une famille de $n-1$ vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$, libre d'après la question 1.(b). Donc on a $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \geq n-1$.

     D'autre part, f n'est pas bijective d'après la question 1.(a), donc $\mathrm{rg}(f) \leq n-1$.

     On peut donc conclure avec ces deux inégalités que $\boxed{\mathrm{rg}(f) = n-1}$.

   - **Méthode 2.** La famille $\mathscr{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre d'après la question 1.(b), de cardinal $n = \dim(E)$. C'est donc une base de E. Écrivons la matrice de f dans cette base, on a :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet pour $0 \leq i \leq n-2$, on a dans la i-ème colonne à calculer $f(f^{i-1}(x_0)) = f^i(x_0)$ qui est le $(i+1)$-ème vecteur de la base $\mathscr{B}$. Et pour $i = n-1$, on a $f(f^{n-1}(x_0)) = f^n(x_0) = 0_E$. D'où la matrice donnée ci-dessus. Le calcul de son rang ne pose alors pas de problème, puisque ses $n-1$ premiers vecteurs colonnes sont échelonnés, et le dernier est nul. Ainsi on a $\boxed{\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M_{\mathscr{B}}(f)) = n-1}$.

3. Rappelons l'identité suivante, valable lorsque deux endomorphismes f et g **commutent** (on avait énoncé une propriété analogue pour des matrices qui commutent) :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad g^p - f^p = (g-f)\left(g^{p-1} + g^{p-2} \circ f + \cdots + g \circ f^{p-2} + f^{p-1}\right).$$

On peut la démontrer en développant le membre de droite (les termes se téléscopent). Ici on obtient pour $p = n$:

$$g^n = g^n - (-f)^n = (g+f)\left(g^{n-1} - g^{n-2} \circ f + \cdots + (-1)^{n-2} g \circ f^{n-2} + (-1)^{n-1} f^{n-1}\right)$$

Comme de plus g est bijective, et que les endomorphismes f et g commutent, donc f et g^{-1} aussi, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id}_E &= (g^{-1})^n \circ (g+f)\left(g^{n-1} - g^{n-2} \circ f + \cdots + (-1)^{n-2} g \circ f^{n-2} + (-1)^{n-1} f^{n-1}\right) \\
&= (g+f) \circ (g^{-1})^n \circ \left(g^{n-1} - g^{n-2} \circ f + \cdots + (-1)^{n-2} g \circ f^{n-2} + (-1)^{n-1} f^{n-1}\right) \\
&= (g+f)\left(g^{-1} - g^{-2} \circ f + \cdots + (-1)^{n-2} g^{-n+1} \circ f^{n-2} + (-1)^{n-1} g^{-n} \circ f^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{g+f \text{ est bien un automorphisme de } E}$.

Exercice 3 (EDHEC 2008)

1. Soit $\lambda > 0$. On effectue une intégration par parties comme indiqué sur le segment $[a, b]$. Pour cela je suggère d'utiliser le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|ccc}
+ & f & & g' \\
 & & \searrow & \\
- & f' & \xleftarrow{\int} & g
\end{array} \qquad \int fg' = [fg] - \int f'g$$

Dans notre cas, cela donne :

$$\begin{array}{c|ccc}
+ & f(t) & & \cos(\lambda t) \\
 & & \searrow & \\
- & f'(t) & \xleftarrow{\int} & \dfrac{\sin(\lambda t)}{\lambda}
\end{array}$$

L'intégration est licite car les fonctions f et $t \mapsto \dfrac{\sin(\lambda t)}{\lambda}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. On obtient ainsi par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t &= \left[f(t)\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}\mathrm{d}t \\
&= f(b)\frac{\sin(\lambda b)}{\lambda} - f(a)\frac{\sin(\lambda a)}{\lambda} - \int_a^b f'(t)\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On a $\left|f(b)\dfrac{\sin(\lambda b)}{\lambda}\right| \leq \dfrac{|f(b)|}{\lambda}$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{|f(b)|}{\lambda} = 0$ donc par le théorème d'encadrement :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} f(b)\frac{\sin(\lambda b)}{\lambda} = 0.$$

De même, on montre que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} f(a)\dfrac{\sin(\lambda a)}{\lambda} = 0$.
D'autre part on a par inégalité triangulaire puis croissance de l'intégrale :

$$\left|\int_a^b f'(t)\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b \left|f'(t)\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}\right| \mathrm{d}t \leq \frac{1}{\lambda}\int_a^b \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t.$$

Or $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_a^b \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t = 0$, donc par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f'(t)\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}\mathrm{d}t$ existe et vaut 0.

Par suite, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t = 0}$.

2. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) = \cos\left(kt + \frac{t}{2}\right) = \cos(kt)\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \sin(kt)\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

et :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right) &= \cos\left(kt - \frac{t}{2}\right) = \cos(kt)\cos\left(-\frac{t}{2}\right) - \sin(kt)\sin\left(-\frac{t}{2}\right)\\ &= \cos(kt)\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin(kt)\sin\left(\frac{t}{2}\right).\end{aligned}$$

En sommant ces deux égalités, on trouve :

$$\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right) = 2\cos(kt)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

d'où :

$$\boxed{\cos(kt)\cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right].}$$

(b) Soit $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2}\left[\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right]\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-1)^k}{2}\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) - \frac{(-1)^{k-1}}{2}\cos\left(\frac{2(k-1)+1}{2}t\right)\right]\\ &= \frac{(-1)^n}{2}\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \frac{(-1)^{1-1}}{2}\cos\left(\frac{2(1-1)+1}{2}t\right) \text{ par télescopage}\\ &\boxed{= \frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right).}\end{aligned}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $t \in [0,1]$, on a $\frac{t}{2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \neq 0$. On a alors en divisant par $\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$:

$$\forall t \in [0,1],\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = (-1)^n\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

En intégrant sur $[0,1]$, on obtient :

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos(kt)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left[(-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}\right] \mathrm{d}t$$

donc $$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^1 \cos(kt)\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{d}t$$

donc $$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^1 = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}$$

d'où $$\boxed{\sum_{k=1}^{n} u_k = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}.}$$

3. Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ (le dénominateur ne s'annule pas) et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{2} = +\infty$, on en déduit à l'aide de la question 1. que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) \mathrm{d}t = 0.$$

La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, on a encore :

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t = 0.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}.}$

Exercice 4 (EDHEC 2008)
Partie I : Quelques résultats utiles pour les parties suivantes

1. Soit $i \in \{1,\dots,n\}$. Chaque lancer de la pièce correspond à une épreuve de Bernoulli avec pour succès ¡¡ la prévision du joueur i est correcte pour ce lancer ¿¿. On réalise donc une succession de $2p+1$ épreuves de Bernoulli indépendantes (les différents lancers sont indépendants) et de probabilité de succès $\dfrac{1}{2}$ (la pièce est équilibrée). X_i représente le nombre de prévisions correctes donc le nombre de succès. Ainsi, $\boxed{X_i \text{ suit la loi binomiale de paramètres } 2p+1 \text{ et } \frac{1}{2}}$, c'est-à-dire $X_i(\Omega) = [\![0, 2p+1]\!]$ et pour tout $k \in X_i(\Omega)$:

$$P(X_i = k) = \binom{2p+1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1-\frac{1}{2}\right)^{2p+1-k} = \binom{2p+1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2p+1}.$$

2. (a) D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$S_p + T_p = \sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} 1^k 1^{2p+1-k} = (1+1)^{2p+1} \boxed{= 2^{2p+1}.}$$

(b) On effectue le changement d'indice $k' = 2p+1-k$. On obtient :

$$S_p = \sum_{k'=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{2p+1-k'} = \sum_{k'=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k'} \boxed{= T_p.}$$

(c) Ainsi, $S_p+T_p = 2S_p = 2^{2p+1}$ donc on a $\boxed{S_p = \frac{1}{2}2^{2p+1} = 2^{2p}}$. On obtient par incompatibilité des évènements :

$$r_p = \sum_{k=0}^{p} P(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2p+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2p+1} S_p \boxed{= \frac{1}{2}.}$$

Partie II : Les joueurs jouent au hasard et indépendamment les uns des autres.

1. On raisonne par double inclusion.

$\subset$ Soit le joueur J_1 perd et alors son gain prend la valeur 0, soit il gagne et alors selon le nombre $j \in [\![0, n-1]\!]$ des autres gagnants, le partage équitable entre les $j+1$ gagnants des $n!$ euros donne un gain de $\frac{n!}{j+1}$ euros. Ainsi, on a :

$$G_1(\Omega) \subset \{0\} \cup \left\{ \frac{n!}{j+1} \ / \ j \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

$\supset$ Il s'agit de montrer que toutes ces valeurs peuvent bien être prises par G_1, c'est-à-dire qu'il existe une réalisation de chacun ces évènements.

On suppose que la pièce donne $2p+1$ *pile*, que le joueur J_1 n'avait prédit que des *face* et que tous les autres joueurs n'avaient prédit que des *pile*. Dans ce cas, J_1 perd et l'événement $[G_1 = 0]$ est réalisé.

Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$. On suppose que la pièce donne $2p+1$ *pile*, que le joueur J_1 avait prédit un *pile* puis $2p$ *face*, que les joueurs $J_2, J_3, \ldots, J_{j+1}$ avaient fait la même prédiction que J_1 et que les joueurs $J_{j+2}, J_{j+3}, \ldots, J_n$ n'avaient prédit que des *face*. Dans ce cas, J_1 gagne ainsi que les joueurs $J_2, J_3, \ldots, J_{j+1}$ et l'événement $\left[G_1 = \frac{n!}{j+1}\right]$ est réalisé.

Ainsi, on a :

$$G_1(\Omega) \supset \{0\} \cup \left\{ \frac{n!}{j+1} \ / \ j \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Par suite, on a $\boxed{G_1(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \frac{n!}{j+1} \ / \ j \in [\![0, n-1]\!] \right\}.}$

2. (a) On suppose que l'événement $[X_1 = 0]$ est réalisé. Ainsi, le joueur 1 n'a aucune prévision correcte.

Son gain est alors de $\frac{n!}{n}$ euros si et seulement si les $n-1$ autres joueurs n'ont eux aussi aucune prévision correcte (les n joueurs se partageant alors équitablement les $n!$ euros).

Or, la probabilité qu'un joueur n'ait aucune prévision correcte est q_0 et les évènements $[X_i = 0]$ pour $i = 2, \ldots, n$ sont mutuellement indépendantes pour la probabilité $P_{[X_1=0]}$ (les joueurs jouent de façon indépendante). Donc on a :

$$\boxed{P_{[X_1=0]}\left(G_1 = \frac{n!}{n}\right) = (q_0)^{n-1}}.$$

(b) Soit $j \in [\![0, n-2]\!]$. On suppose que l'événement $[X_1 = 0]$ est réalisé. Ainsi, le joueur 1 n'a aucune prévision correcte. Son gain est alors de $\frac{n!}{j+1}$ euros si et seulement s'il gagne ainsi que j autres joueurs exactement. Or, dans ce cas, les $n-j-1$ autres joueurs (avec $n-j-1 > 0$) perdent, donc font strictement moins de prévisions que J_1, ce qui est impossible. Ainsi, on a bien :

$$\boxed{P_{[X_1=0]}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) = 0.}$$

(c) On a par définition :

$$\begin{aligned}
E(G_1|[X_1=0]) &= 0\times P_{[X_1=0]}(G_1=0)+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{n!}{j+1}P_{[X_1=0]}\left(G_1=\frac{n!}{j+1}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n-2}\frac{n!}{j+1}\underbrace{P_{(X_1=0)}\left(G_1=\frac{n!}{j+1}\right)}_{=0 \text{ d'après 2.(b)}}+\frac{n!}{n}\underbrace{P_{(X_1=0)}\left(G_1=\frac{n!}{n}\right)}_{=(q_0)^{n-1} \text{ d'après 2.(a)}}\\
&= (n-1)!(q_0)^{n-1}.
\end{aligned}$$

3. (a) Soit $k\in[\![1,2p+1]\!]$ et $j\in[\![0,n-1]\!]$. On suppose que l'événement $[X_1=k]$ est réalisé. Ainsi, le joueur 1 a exactement k prévisions correctes. Son gain est alors de $\frac{n!}{j+1}$ euros si et seulement s'il gagne ainsi que j autres joueurs exactement, c'est-à-dire si et seulement si j autres joueurs font k prévisions correctes et les $n-j-1$ autres joueurs font strictement moins de k prévisions correctes.

Nous sommes amenés à calculer la probabilité que j joueurs parmi $n-1$ fassent k prévisions correctes et les $n-j-1$ autres joueurs fassent strictement moins de k prévisions correctes :

- la probabilité que j joueurs donnés fassent k prévisions correctes et les $n-j-1$ restants fassent strictement moins de k prévisions correctes est $(q_k)^j(r_{k-1})^{n-j-1}$ (car les joueurs jouent indépendamment les uns des autres).
- il y a $\binom{n-1}{j}$ façons de choisir les j joueurs faisant k prévisions correctes parmi les $n-1$ joueurs autres que le joueur 1 (les $n-j-1$ restants étant automatiquement désignés).

Ainsi on a :

$$\boxed{P_{[X_1=k]}\left(G_1=\frac{n!}{j+1}\right)=\binom{n-1}{j}(q_k)^j(r_{k-1})^{n-j-1}.}$$

(b) On a :

$$\frac{1}{j+1}\binom{n-1}{j}=\frac{1}{j+1}\frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!}=\frac{(n-1)!}{(j+1)!(n-1-j)!}=\frac{1}{n}\times\frac{n!}{(j+1)!(n-j-1)!}\boxed{=\frac{1}{n}\binom{n}{j+1}.}$$

Ainsi, on a pour tout $k\in[\![1,2p+1]\!]$:

$$\begin{aligned}
E\left(G_1|[X_1=k]\right) &= 0\times P_{[X_1=k]}(G_1=0)+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{n!}{j+1}P_{[X_1=k]}\left(G_1=\frac{n!}{j+1}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{n!}{j+1}\binom{n-1}{j}(q_k)^j(r_{k-1})^{n-1-j}\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{n!}{n}\binom{n}{j+1}(q_k)^j(r_{k-1})^{n-1-j} \quad \text{par ce qui précède}\\
&= \frac{(n-1)!}{q_k}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j+1}(q_k)^{j+1}(r_{k-1})^{n-1-j}\\
&= \frac{(n-1)!}{q_k}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(q_k)^i(r_{k-1})^{n-i} \quad \text{en posant } i=j+1\\
&= \frac{(n-1)!}{q_k}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(q_k)^i(r_{k-1})^{n-i}-(q_k)^0(r_{k-1})^n\right)\\
&= \frac{(n-1)!}{q_k}\left((q_k+r_{k-1})^n-(r_{k-1})^n\right) \quad \text{par la formule du binôme de Newton}
\end{aligned}$$

On obtient donc $\boxed{E\left(G_1|[X_1=k]\right)=(n-1)!\dfrac{(r_k)^n-(r_{k-1})^n}{q_k}}$ puisque

$$r_k=P(X_1\leq k)=P(X_1=k)+P(X_1\leq k-1)=q_k+r_{k-1}.$$

(c) En posant $r_{-1}=0$, comme $r_0=q_0$, on a :

$$(n-1)!\frac{(r_0)^n-(r_{-1})^n}{q_0}=(n-1)!\frac{(q_0)^n}{q_0}=(n-1)!(q_0)^{n-1}=E\left(G_1/X_1=0\right).$$

$\boxed{\text{La formule est donc encore valable pour } k=0.}$

4. $\big([X_1=k]\big)_{k\in[\![0,2p+1]\!]}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. La formule de l'espérance totale (qui s'applique puisque G_1 est une variable finie) donne alors :

$$\begin{aligned}E(G_1)&=\sum_{k=0}^{2p+1}E\left(G_1/[X_1=k]\right)P(X_1=k)=\sum_{k=0}^{2p+1}(n-1)!\frac{(r_k)^n-(r_{k-1})^n}{q_k}q_k\\&=(n-1)!\sum_{k=0}^{2p+1}\left((r_k)^n-(r_{k-1})^n\right)=(n-1)!\left((r_{2p+1})^n-(r_{-1})^n\right)\quad\text{par télescopage}\\&=(n-1)!(1^n-0^n)\boxed{=(n-1)!.}\end{aligned}$$

Remarque. On pouvait s'attendre à ce résultat : les joueurs jouent indépendamment les uns des autres avec la même stratégie. Leur espérance de gain est donc la même, et comme de plus $G_1+\cdots+G_n=n!$, on en déduit que

$$n!=E(G_1+\ldots G_n)=nE(G_1)\text{ soit }E(G_1)=(n-1)!.$$

Partie III : J_1 et J_2 forment un groupe et les autres joueurs jouent comme précédemment.

1. (a) Supposons que J_1 et J_2 aient fait respectivement α et β prévisions correctes. Alors $\beta=2p+1-\alpha$. On a alors deux cas :
   - soit $\alpha\geq p+1$ et alors $\beta\leq 2p+1-(p+1)=p$;
   - soit $\alpha<p+1$ et nécessairement $\beta>2p+1-(p+1)=p$.

   Par suite, $\boxed{\text{un et un seul des joueurs } J_1 \text{ et } J_2 \text{ a au moins } (p+1) \text{ prévisions correctes.}}$

   (b) On procède par double inclusion.

   $\subset$ D'après ce qui précède, le nombre de prévisions correctes du meilleur de J_1 et J_2 est supérieur ou égal à $p+1$, et comme il est bien sûr inférieur ou égal à $2p+1$, on a :

   $$Y(\Omega)\subset[\![p+1,2p+1]\!].$$

   $\supset$ Soit $k\in[\![p+1,2p+1]\!]$. On suppose que la pièce donne $2p+1$ *pile*, que le joueur J_1 avait prédit k *pile* puis $2p+1-k$ *face* et donc J_2 avait prédit k *face* puis $2p+1-k$ *pile*. Dans ce cas, le meilleur de J_1 et J_2 est J_1 (puisque $2p+1-k<k$) et il a k prévisions correctes donc l'événement $[Y=k]$ est réalisé.
   Ainsi, on a $Y(\Omega)\supset[\![p+1,2p+1]\!]$.

   Par suite, on a $\boxed{Y(\Omega)=[\![p+1,2p+1]\!]}$.

2. Si les lancers donnent F, P, P ou P, F, F, l'un des deux joueurs a trois prévisions correctes donc Y prend la valeur 3.

   Dans le cas contraire les deux joueurs ont au moins une prévision fausse, Y ne prend donc pas la valeur 3 tout en prenant une valeur de l'ensemble $[\![p+1,2p+1]\!]=[\![2,3]\!]$ donc Y prend la valeur 2.

   Ainsi, dans l'exemple donné au début de cette partie, Y prend la valeur 3 si les lancers donnent F, P, P ou P, F, F et Y prend la valeur 2 sinon.

3. Soit $k \in [\![p+1, 2p+1]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= P\big(([X_1=k]\cap[X_2=2p+1-k])\cup([X_1=2p+1-k]\cap[X_2=k])\big)\\
&= P([X_1=k]\cap[X_2=2p+1-k]) + P([X_1=2p+1-k]\cap[X_2=k])\\
&\quad \text{car } [X_1=k]\cap[X_2=2p+1-k] \text{ et } [X_1=2p+1-k]\cap[X_2=k] \text{ sont incompatibles}\\
&= P(X_1=k)+P(X_2=k)\\
&\quad \text{car } [X_1=k]=[X_2=2p+1-k] \text{ et } [X_1=2p+1-k]=[X_2=k]\\
&= q_k + q_k \boxed{= 2q_k.}
\end{aligned}$$

4. Par double inclusion.

   $\subset$ Soit le meilleur de J_1 et J_2 est battu par au moins un autre joueur et alors le gain G' est nul, soit le meilleur de J_1 et J_2 atteint le score maximum mais alors le nombre de joueurs ayant gagné avec lui est un élément de $[\![0, n-2]\!]$ (son coéquipier a nécessairement perdu). Ainsi, $G'(\Omega) \subset \{0\} \cup \left\{\dfrac{n!}{j+1} \ / \ j \in [\![0, n-2]\!]\right\}$.

   $\supset$ On suppose que la pièce donne $2p+1$ *pile*, que le joueur J_1 avait prédit un *pile* puis $2p$ *face*, le joueur J_2 ayant alors prédit un *face* puis $2p$ *pile* et que tous les autres joueurs n'avaient prédit que des *pile*. Dans ce cas, le meilleur de J_1 et J_2 est J_2 et il a $2p$ prévisions correctes mais les autres joueurs ont strictement plus de prévisions correctes donc l'événement $[G'=0]$ est réalisé.
   Soit $j \in [\![0, n-2]\!]$. On suppose que la pièce donne $2p+1$ *pile*, que le joueur J_1 avait prédit un *pile* puis $2p$ *face*, le joueur J_2 ayant alors prédit un *face* puis $2p$ *pile*, que les joueurs $J_3, \ldots, J_{j+2}$ avaient fait la même prédiction que J_2 et que les joueurs $J_{j+3}, \ldots, J_n$ avaient fait la même prédiction que J_1. Dans ce cas, J_2 gagne ainsi que les joueurs $J_3, \ldots, J_{j+2}$ et l'événement $\left[G' = \frac{n!}{j+1}\right]$ est réalisé. Ainsi, on a $G'(\Omega) \supset \{0\} \cup \left\{\dfrac{n!}{j+1} \ / \ j \in [\![0, n-2]\!]\right\}$.

   Par suite, on a $\boxed{G'(\Omega) = \{0\} \cup \left\{\dfrac{n!}{j+1} \ / \ j \in [\![0, n-2]\!]\right\}.}$

5. (a) Soit $k \in [\![p+1, 2p+1]\!]$. Soit $j \in [\![0, n-2]\!]$. On suppose que l'événement $[Y=k]$ est réalisé. Ainsi, le meilleur de J_1 et J_2 a k prévisions correctes. Son gain est alors de $\frac{n!}{j+1}$ euros si et seulement s'il gagne ainsi que j autres joueurs exactement c'est-à-dire si et seulement si j autres joueurs font k prévisions correctes et les $n-j-2$ autres joueurs font strictement moins de k prévisions correctes (on sait que le coéquipier a strictement moins de k prévisions correctes). Calculons la probabilité de cet évènement :

   - La probabilité que j joueurs donnés fassent k prévisions correctes et les $n-j-2$ restants fassent strictement moins de k prévisions correctes est $(q_k)^j (r_{k-1})^{n-j-2}$ (car les joueurs $J_3, \ldots, J_n$ jouent indépendamment les uns des autres).
   - Il y a $\dbinom{n-2}{j}$ façons de choisir les j joueurs faisant k prévisions correctes parmi les $n-2$ joueurs autres que les joueurs 1 et 2 (les $n-j-2$ restants étant automatiquement désignés).

   Ainsi on a :

$$P_{[Y=k]}\left(G' = \frac{n!}{j+1}\right) = \binom{n-2}{j}(q_k)^j (r_{k-1})^{n-j-2}.$$

(b) Soit $k \in [\![p+1, 2p+1]\!]$. On a en procédant comme à la question II.3.(b) :

$$\begin{aligned}
E\left(G'|[Y=k]\right) &= 0 \times P_{[Y=k]}(G'=0) + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{j+1} P_{[Y=k]}\left(G' = \frac{n!}{j+1}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{j+1} \binom{n-2}{j} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-2-j} = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{n-1} \binom{n-1}{j+1} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-2-j} \\
&= \frac{n(n-2)!}{q_k} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j+1} (q_k)^{j+1} (r_{k-1})^{n-1-j-1} \\
&= \frac{n(n-2)!}{q_k} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} (q_k)^{i} (r_{k-1})^{n-1-i} \\
&= \frac{n(n-2)!}{q_k} \left[(q_k + r_{k-1})^{n-1} - (q_k)^0 (r_{k-1})^{n-1}\right] \\
&\boxed{= n(n-2)! \frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k}.}
\end{aligned}$$

6. (a) $\left([Y=k]\right)_{k \in [\![p+1, 2p+1]\!]}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.
La formule de l'espérance totale (qui s'applique puisque G' est une variable finie) donne alors :

$$\begin{aligned}
E(G') &= \sum_{k=p+1}^{2p+1} E(G'|[Y=k])\, P(Y=k) = n\,(n-2)! \sum_{k=p+1}^{2p+1} \frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k}\, 2\, q_k \\
&= 2\,n\,(n-2)! \left((r_{2p+1})^{n-1} - (r_p)^{n-1}\right) \boxed{= 2\,n\,(n-2)! \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}
\end{aligned}$$

car $r_{2p+1} = P(X_1 \leq 2p+1) = 1$ et $r_p = \dfrac{1}{2}$.

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in [\![3, +\infty[\![$, $2^{n-1} > n$.

Initialisation : $2^{3-1} = 4 > 3$ donc la propriété est vraie pour $n = 3$.

Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un élément n de $[\![3, +\infty]\!]$ et montrons la pour $n+1$.
On a $2^{(n+1)-1} = 2 \times 2^{n-1}$ et $2^{n-1} > n$ par hypothèse de récurrence. D'où

$$2^{(n+1)-1} > 2n = (n+1) + (n-1) > n+1.$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in [\![3, +\infty]\!],\ 2^{n-1} > n.}$

(c) Comme $G'_1 = \frac{1}{2} G'$, on a $\boxed{E(G'_1) = n(n-2)! \left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)}$.

Comme $2^{n-1} > n$ alors $1 - \dfrac{1}{2^{n-1}} > 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n}$. Ainsi on a :

$$E(G'_1) > \frac{n(n-1)(n-2)!}{n} = (n-1)! = E(G_1).$$

$\boxed{\text{La stratégie adoptée par les joueurs } J_1 \text{ et } J_2 \text{ est donc avantageuse}}$ du point de vue de l'espérance de leur gain.