DM4

Devoir maison à rendre le 04/11/2019

Vous traiterez l'un des DM4 ou DM5 au choix.

Exercice 1

1. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f \circ (f - \mathrm{Id})^2 = 0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

   (a) Déterminer $(f - \mathrm{Id})^2 + f \circ (2\mathrm{Id} - f)$.

   (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = (f - \mathrm{Id})^2(x) + (f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x)$.

   (c) Utiliser ce dernier résultat pour établir que : $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

2. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que : $f \circ (f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id}) = 0$.

   (a) Déterminer un polynôme P du premier degré vérifiant : $\dfrac{1}{4}(X-1)(X-4) + XP(X) = 1$.

   (b) En déduire que : $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

3. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f, dont le degré est égal à p (avec $p \geq 2$), et tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

   (a) Montrer qu'il existe p réels $a_1, \dots, a_p$ avec $a_1 \neq 0$, tels que $P = a_1 X + \dots + a_p X^p$.

   (b) En déduire que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$, puis établir que : $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

   (c) En quoi cette question est-elle une généralisation des deux précédentes ?

Exercice 2

Soit E de dimension finie n. On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est *nilpotent* s'il existe $p \geq 1$ tel que :

$$f^p = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

L'entier p s'appelle alors *l'indice de nilpotence de f*.

On suppose dans la suite que f est un endomorphisme nilpotent d'indice p.

1. (a) f peut-il être bijectif ?

   (b) Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre.

   (c) En déduire que $f^n = 0$.

2. On suppose dans cette question que $p = n$. Déterminer le rang de f.

3. Soit $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f + g \in GL(E)$.

Exercice 3

On se propose dans cet exercice de montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\sin n}{n}$ est convergente et de calculer sa somme.

1. On désigne par f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a, b]$ et par λ un réel strictement positif. Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t = 0$.

2. (a) On rappelle que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
Exprimer, pour tout réel t, $\cos \frac{t}{2} \cos(kt)$ en fonction de $\cos(\frac{2k+1}{2}t)$ et $\cos(\frac{2k-1}{2}t)$.

   (b) En déduire que :

$$\forall t \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \cos \frac{t}{2} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos(kt) = \frac{1}{2} \left((-1)^n \cos(\frac{2n+1}{2}t) - \cos \frac{t}{2} \right).$$

   (c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos(\frac{2n+1}{2}t)}{2\cos\frac{t}{2}} \mathrm{d}t - \frac{1}{2}$.

3. Utiliser la première question pour conclure que la série de terme général u_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 4

Dans ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 et p est un entier naturel.

Un jeu oppose n joueurs $J_1, J_2, \ldots, J_n$. Le jeu se déroule de la façon suivante : une pièce équilibrée est lancée $(2p+1)$ fois. Avant les lancers, chaque joueur écrit une liste de prévisions pour ces lancers. Cette liste contient donc une suite de $(2p+1)$ caractères P (pour *pile*) ou F (pour *face*). Les gagnants sont les joueurs ayant le plus grand nombre de prévisions correctes et ils se partagent équitablement la somme de $n!$ euros.

Par exemple, pour $p=1$, si les lancers donnent trois fois *pile*, le joueur ayant noté (P,F,P) a deux prévisions correctes, et si les lancers donnent dans cet ordre P,F,P, le joueur ayant noté (F,P,F) n'a aucune prévision correcte.

Pour i de $[\![1,n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du joueur J_i, on note G_i la variable aléatoire égale au gain du joueur J_i et $E(G_i)$ l'espérance de G_i.

L'objectif du problème est de déterminer l'espérance de gain du joueur J_1 selon deux stratégies présentées dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : quelques résultats utiles pour les parties suivantes.

1. Montrer que les variables X_i suivent toutes la même loi binomiale dont on donnera les paramètres.
On pose alors, pour tout i de $[\![1,n]\!]$ et tout k de $X_i(\Omega)$: $q_k = P(X_i = k)$ et $r_k = P(X_i \leq k)$.

2. On pose $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k}$ et $T_p = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}$.

   (a) Calculer $S_p + T_p$.

   (b) Montrer que $S_p = T_p$.

   (c) Déduire des deux résultats précédents la valeur de S_p puis montrer que $r_p = \frac{1}{2}$.

Partie 2 : les joueurs jouent au hasard et indépendamment les uns des autres.

1. Montrer que $G_1(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \frac{n!}{j+1} \,\middle|\, j \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.

2. (a) Montrer que $P_{[X_1=0]}\left(G_1 = \frac{n!}{n}\right) = (q_0)^{n-1}$.

   (b) Montrer que, pour tout j de $[\![0, n-2]\!]$: $P_{[X_1=0]}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) = 0$.

(c) En déduire que l'espérance de G_1 conditionnellement à l'événement $[X_1 = 0]$ est :

$$E\left(G_1\,|[X_1=0]\,\right) = (n-1)!(q_0)^{n-1}$$

3. (a) Établir que, pour tout k non nul de $X_1(\Omega)$ et pour tout j élément de $[\![0, n-1]\!]$, on a :

$$P_{[X_1=k]}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) = \binom{n-1}{j}(q_k)^j(r_{k-1})^{n-1-j}$$

   (b) Établir que $\dfrac{1}{j+1}\dbinom{n-1}{j} = \dfrac{1}{n}\dbinom{n}{j+1}$ puis en déduire que, pour tout k non nul de $X_1(\Omega)$, l'espérance de G_1 conditionnellement à l'événement $[X_1 = k]$ est :

$$E\left(G_1\,|[X_1=k]\,\right) = (n-1)!\frac{(r_k)^n - (r_{k-1})^n}{q_k}$$

   (c) Vérifier que cette expression reste valable pour $k = 0$ en posant $r_{-1} = 0$.

4. Utiliser les questions 3.b) et 3.c) pour établir que $E(G_1) = (n-1)!$.

Partie 3 : J_1 et J_2 forment un groupe et les autres joueurs jouent comme dans la partie 2.

Dans cette partie, J_1 et J_2 adoptent la stratégie suivante: J_1 joue au hasard mais J_2 joue, pour chaque lancer, les prévisions contraires de J_1. Par exemple, pour $p = 1$, si J_1 a choisi (F, P, P) alors J_2 choisit (P, F, F).

On note G' le gain du groupe formé par ces deux joueurs, J_1 et J_2 décidant de partager équitablement ce gain. On a donc, en désignant par G'_1 et G'_2 les gains respectifs de J_1 et J_2: $G' = G'_1 + G'_2$ et $G'_1 = G'_2$.

On pose, pour tout i de $[\![1, n]\!]$ et pour tout k de $X_i(\Omega)$: $q_k = P(X_i = k)$ et $r_k = P(X_i \leq k)$.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du meilleur de J_1 et J_2.

1. (a) Montrer que un et un seul des joueurs J_1 et J_2 a au moins $p+1$ prévisions correctes.
   (b) En déduire que: $Y(\Omega) = [\![p+1, 2p+1]\!]$.

2. Vérifier que, dans l'exemple donné au début de cette partie, Y prend la valeur 3 si les lancers donnent dans cet ordre F, P, P ou P, F, F et Y prend la valeur 2 sinon.

3. Pour tout k de $[\![p+1, 2p+1]\!]$, montrer que : $P(Y = k) = 2q_k$.

4. Montrer que $G'(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \frac{n!}{j+1} \,\middle|\, j \in [\![0, n-2]\!] \right\}$.

5. (a) Établir que, pour tout k de $[\![p+1, 2p+1]\!]$ et tout j de $[\![0, n-2]\!]$, on a :

$$P_{[Y=k]}\left(G' = \frac{n!}{j+1}\right) = \binom{n-2}{j}(q_k)^j(r_{k-1})^{n-2-j}$$

   (b) En déduire que, pour tout k de $[\![p+1, 2p+1]\!]$, l'espérance de G' conditionnellement à l'événement $[Y = k]$ est :

$$E\left(G'\,|[Y=k]\right) = n(n-2)!\frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k}$$

6. (a) En déduire, en utilisant le résultat de la deuxième question de la partie 1, que :

$$E(G') = 2n(n-2)!\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

   (b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3 \ \Rightarrow\ 2^{n-1} > n$.
   (c) Déterminer $E(G'_1)$ et vérifier que la stratégie adoptée par les joueurs J_1 et J_2 est avantageuse pour J_1 (et donc pour J_2) du point de vue de l'espérance de leur gain.
