DM5

Devoir maison à rendre le 08/11/2021

Exercice 1.1 (D'après Ecricome 2007)

1. Soit f la fonction définie sur $]-\infty, \ln 2[$ par $f(x) = \ln(2-e^x)$.

> **Rappel. Formule de Taylor-Young.**
> Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en tout point de I, et on a pour tout $(x,a) \in I^2$:
> $$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n).$$

La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-\infty, \ln 2[$, on a d'après la formule de Taylor-Young que pour x au voisinage de 0 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

On a $f(0) = \ln 1 = 0$, et pour tout $x \in]-\infty, \ln 2[$:

$$f'(x) = \frac{-e^x}{2-e^x} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{-e^x(2-e^x) + e^x(-e^x)}{(2-e^x)^2} = \frac{-2e^x}{(2-e^x)^2},$$

d'où $f'(0) = -1$ et $f''(0) = -2$. On en déduit que pour x au voisinage de 0 :

$$\boxed{\ln(2-e^x) = -x - x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).}$$

2. (a) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. On a :

$$0 < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad < e^{1/k} \leq e^{1/2}$$

par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. D'où :

$$2 - e^{1/2} \leq 2 - e^{1/k} < 1.$$

De plus, on a $e < 4$. Par stricte croissance de la fonction racine sur $[0, +\infty[$, on obtient $e^{1/2} < 2$ donc $2 - e^{1/2} > 0$.

On a donc bien $\boxed{0 < 2 - e^{1/k} < 1}$.

(b) On sait que pour tout $x \in]0,1[$, $\ln x < 0$. Par 2.(a), on en déduit que :

$$\boxed{\forall k \geq 2, \quad \ln(2-e^{1/k}) < 0.}$$

(c) On applique le théorème de comparaison pour les séries à termes généraux de signes constants :

- Pour tout $k \geq 2$, $\ln(2-e^{1/k}) < 0$. Donc le terme général de la série $\sum_{k\geq 2} \ln(2-e^{1/k})$ est de **signe constant** (négatif) ;

- On a $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{k} = 0$ et par 1., $\ln(2-e^x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$ donc $\ln(2-e^{1/k}) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{k}$;
- La série harmonique $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{1}{k}$ diverge.

Par comparaison, $\boxed{\text{la série de terme général } \ln(2-e^{1/k}) \text{ diverge.}}$

(d) $(V_n)_{n\geq 2}$ est la suite des sommes partielles associée à la série de terme général **négatif** $\ln(2-e^{1/k})$. Elle est donc décroissante. Par le théorème de la limite monotone, on a deux cas possibles :

- soit (V_n) est minorée et dans ce cas elle converge. Mais cela contredirait la divergence de la série $\sum \ln(2-e^{1/k})$ établie à la question précédente.
- soit elle n'est pas minorée, et dans ce cas elle tend vers $-\infty$.

Ainsi on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty}$, et par caractérisation séquentielle de la limite, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

3. (a) On a pour tout $n\geq 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\left[\ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right] &= \sum_{k=2}^{n}\ln(2-e^{1/k}) - \sum_{k=2}^{n}\left(\ln(k-1)-\ln(k)\right)\\ &= V_n - (\ln(1)-\ln(n)) \text{ par télescopage}\\ &= \ln\left(\exp(V_n)\right) + \ln(n) = \ln(u_n)+\ln(n) = \ln(nu_n).\end{aligned}$$

(b) On a d'après 1., $\ln(2-e^x) = -x - x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ et $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{1}{k} = 0$, d'où :

$$\ln(2-e^{1/k}) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

D'autre part, on a $\ln(1-x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ et $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{1}{k} = 0$ donc :

$$\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{k}\right)^2 + o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Par somme, on obtient :

$$\ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{1}{2k^2} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Pour obtenir l'équivalent demandé, on prend le premier terme du développement limité
obtenu :

$$\boxed{\ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2k^2}.}$$

(c) On procède par comparaison :

- $\ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2k^2}$;
- Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{2k^2} \leq 0$;
- La série de Riemann $\sum\limits_{k\geq 1}\dfrac{1}{k^2}$ converge $(2>1)$

Par comparaison, on en déduit que la série $\sum_{k\geq 2}\left[\ln(2-e^{1/k})-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]$ converge.

Notons $S=\sum_{k=2}^{+\infty}\left[\ln(2-e^{1/k})-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]$ la somme de cette série.

On a d'après 3.(a), $\lim_{n\to+\infty}\ln(nu_n)=S$. Par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = e^S.$$

En notant $K=e^S$, on a $K>0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{K/n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{nu_n}{K}=1$ d'où $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{K}{n}}$.

On en déduit la nature de la série des u_n comme suit :

- On a $u_n \underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{K}{n}$;
- On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{K}{n}\geq 0$;
- La série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge.

Par comparaison, $\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ diverge}}$.

4. (a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n=\exp(V_n)>0$ et on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\exp(V_{n+1})}{\exp V_n}&=\exp(V_{n+1}-V_n)=\exp\left(\sum_{k=2}^{n+1}\ln(2-e^{1/k})-\sum_{k=2}^{n}\ln(2-e^{1/k})\right)\\&=\exp(\ln(2-e^{1/(n+1)}))=2-e^{1/(n+1)}<1 \quad \text{d'après 2.(a).}\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_{n+1}<u_n$.
La suite $\boxed{(u_n)_{n\geq 2} \text{ est donc strictement décroissante}}$.

(b) On revient à la définition de suites adjacentes.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}S_{2(n+1)}-S_{2n}&=\sum_{k=2}^{2n+2}(-1)^k u_k-\sum_{k=2}^{2n}(-1)^k u_k=(-1)^{2n+1}u_{2n+1}+(-1)^{2n+2}u_{2n+2}\\&=-u_{2n+1}+u_{2n+2}\leq 0.\end{aligned}$$

Donc la suite $(S_{2n})_{n\geq 1}$ est décroissante.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}S_{2(n+1)+1}-S_{2n+1}&=\sum_{k=2}^{2n+3}(-1)^k u_k-\sum_{k=2}^{2n+1}(-1)^k u_k=(-1)^{2n+2}u_{2n+2}+(-1)^{2n+3}u_{2n+3}\\&=u_{2n+2}-u_{2n+3}\geq 0.\end{aligned}$$

Donc la suite $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ est croissante.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$S_{2n+1}-S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k u_k-\sum_{k=1}^{2n}ku_k=(-1)^{2n+1}u_{2n+1}=-u_{2n+1}.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n+1}-S_{2n})=\lim_{n\to+\infty}(-u_{2n+1})=0$ d'après 2.(d).

On en déduit que $\boxed{\text{les suites } (S_{2n})_{n\geq 1} \text{ et } (S_{2n+1})_{n\geq 1} \text{ sont adjacentes}}$.

(c) Par le théorème des suites adjacentes, on en déduit que $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ convergent vers la même limite.

Comme ce sont les suites extraites d'indices pairs et impairs, on en déduit que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge. Or, c'est la suite des sommes partielles associée à la série de terme général $(-1)^n u_n$. Donc par définition, $\boxed{\text{la série de terme général } (-1)^n u_n \text{ converge}}$.

Déjà vu ?

La série étudiée à la question 4. est dîtes alternée car son terme général est de la forme $(-1)^n u_n$ avec $u_n > 0$. On a déjà rencontré de telles séries en TD avec la série harmonique alternée. C'est un thème classique dans les épreuves de concours. Les arguments utilisés sont souvent les mêmes, et il est intéressant de les connaitre en toute généralité (même si ces résultats sont hors programme). Pour cela, voir le :

☞ **Complément de cours 1. Autour des séries alternées.**

Problème (Ecricome 2012)

Partie I : Étude de deux endomorphismes

1. On vérifie les deux points suivants :

   - $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ g(P) \in \mathbb{R}_n[X]$: Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $g(P) = \Big[(X-1)P\Big]'$ est un polynôme et on a
   $$\deg\Big((X-1)P\Big) = \deg(X-1) + \deg P \leq 1 + n.$$
   Ainsi, $\deg\Big((X-1)P\Big)' \leq \deg\Big((X-1)P\Big) - 1 \leq n$, et $g(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
   Donc g définit une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.
   - Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\begin{aligned} g(\alpha P + \beta Q) &= (X-1)(\alpha P + \beta Q)' + (\alpha P + \beta Q) \\ &= (X-1)(\alpha P' + \beta Q') + \alpha P + \beta Q \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= \alpha\Big((X-1)P' + P\Big) + \beta\left((X-1)Q' + Q\right) = \alpha g(P) + \beta g(Q). \end{aligned}$$
   Donc g est linéaire.

   Par suite, $\boxed{g \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$.

2. On a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:
$$\begin{aligned} f\Big(g(P)\Big)(x) &= \frac{1}{x-1}\int_1^x g(P)(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x-1}\int_1^x \Big[(X-1)P\Big]'(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x-1}\Big[(t-1)P(t)\Big]_1^x = \frac{1}{x-1}\Big((x-1)P(x) - 0\Big) = P(x). \end{aligned}$$

De plus, on a $f\Big(g(P)\Big)(1) = g(P)(1) = (1-1)P'(1) + P(1) = P(1)$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\Big(g(P)\Big)(x) = P(x)$ soit encore $\boxed{f\Big(g(P)\Big) = P.}$

Soit à présent $P \in \mathrm{Ker}(g)$. On a $g(P) = 0$, d'où en appliquant f, $f\Big(g(P)\Big) = f(0)$. Or on a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f(0)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x 0\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad f(0)(1) = 0.$$

. Par suite, $f\Big(g(P)\Big) = f(0) = 0$. Et puisque $f\Big(g(P)\Big) = P$, on obtient $P = 0$.

On a donc bien $\boxed{\mathrm{Ker}(g) = \{0\}.}$

3. Comme $\mathrm{Ker}(g) = \{0\}$, l'application linéaire g est injective. Or, g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension finie. On en déduit que g est bijective et donc $\boxed{g \text{ est un isomorphisme}}$ (ou automorphisme) de $\mathbb{R}_n[X]$.

   Comme g est un automorphisme, g^{-1} existe et on a pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$f(P) = f\Big(g(g^{-1}(P))\Big) = g^{-1}(P).$$

   Ainsi on a $\boxed{g^{-1} = f}$. Or, g^{-1} est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ puisque c'est l'application réciproque de g linéaire, donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned} f(X^k)(x) &= \frac{1}{x-1}\int_1^x t^k \mathrm{d}t = \frac{1}{x-1}\Big[\frac{1}{k+1}t^{k+1}\Big]_1^x = \frac{1}{x-1}\frac{1}{k+1}(x^{k+1}-1) \\ &= \frac{1}{x-1}\frac{1}{k+1}(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^k) = \frac{1}{k+1}(1+x+x^2+\cdots+x^k). \end{aligned}$$

   et $f(X^k)(1) = 1^k = 1 = \dfrac{1}{k+1}(1+1+1^2+\cdots+1^k)$. Ainsi,

$$f(X^k) = \frac{1}{k+1}(1+X+X^2+\cdots+X^k).$$

   On en déduit la matrice A :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & 0 & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & (0) & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}.}$$

On a $g(1) = \Big[(X-1)1\Big]' = (X-1)' = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $g(X^k) = (X-1)kX^{k-1} + X^k = (k+1)X^k - kX^{k-1}$. On en déduit la matrice B :

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & (0) & \vdots \\ \vdots & 0 & 3 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & & \ddots & n & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}}.$$

5. Les matrices A et B sont triangulaires supérieures, donc leurs valeurs propres sont sur leur diagonale. On a donc $\mathrm{Spec}(A) = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n+1}\}$ et $\mathrm{Spec}(B) = \{1, 2, \dots, n+1\}$. En particulier, elles admettent toutes deux $(n+1)$ valeurs propres distinctes et sont de taille $(n+1)\times(n+1)$. Elles sont donc toutes deux diagonalisables. Ainsi, $\boxed{f \text{ et } g \text{ sont diagonalisables.}}$

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

6. Même si ça n'était pas demandé, commençons tout d'abord par donner le support des variables aléatoires Z_k. On a $Z_0(\Omega) = \{n\}$ car Z_0 est une variable aléatoire constante. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $Z_k(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$. En effet, on a :

   - $Z_k(\Omega) \subset \{0, 1, \dots, n\}$ car les numéros tirés sont compris entre 0 et n,
   - toutes ces valeurs $j = 0, 1, \dots, n$ peuvent bien être prises par Z_k, l'évènement $[Z_k = j]$ étant réalisé par exemple si on tire $n-1$ fois la boule n (toujours dans l'urne U_n donc) et 1 fois la boule j (dans l'urne U_n encore)

   Ainsi on a bien $Z_k(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$.

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{0, \dots, n\}$. On applique la formule des probabilités totales à l'évènement $[Z_{k+1} = r]$, avec pour système complet d'évènements $([Z_k = i])_{i=0,\dots,n}$ (qui en est bien un car $Z_k(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$) :

$$P([Z_{k+1} = r]) = \sum_{i=0}^{n} P([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = r]).$$

   Soit $0 \leq i \leq n$, et supposons $P([Z_k = i]) \neq 0$. Alors par la formule des probabilités composées, on a :

$$P([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = r]) = P([Z_k = i]) P_{[Z_k = i]}([Z_{k+1} = r]) = \begin{cases} 0 \text{ si } i < r \\ \dfrac{P([Z_k = i])}{i+1} & \text{si } r \leq i \leq n \end{cases}.$$

   Expliquons cette dernière égalité. Supposons $[Z_k = i]$ réalisé. Le tirage $k+1$ s'effectue alors dans l'urne U_i.

   - Si $i < r$: l'évènement $[Z_{k+1} = r]$ ne peut se réaliser car il n'y a pas de boule r dans l'urne U_i. Donc $P_{[Z_k = i]}([Z_{k+1} = r]) = 0$ dans ce cas.
   - Si $i \geq r$: dans ce cas il y a bien une boule numérotée r dans l'urne U_i, et la probabilité de l'obtenir est $\dfrac{1}{i+1}$ (cas équiprobable). Ainsi on a $P_{[Z_k = i]}([Z_{k+1} = r]) = \dfrac{1}{i+1}$.

On a ainsi montré que si $P([Z_k = i]) \neq 0$, alors :

$$P([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = r]) = \begin{cases} 0 \text{ si } i < r \\ \dfrac{P([Z_k = i])}{i+1} \text{ si } r \leq i \leq n \end{cases} .$$

On obtient finalement que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on a :

$$\boxed{P([Z_{k+1} = r]) = \sum_{i=0}^{n} P([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = r]) = \sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1}.}$$

Notons que cette formule est encore valable lorsque $k = 0$ car alors cela donne :

$$P(Z_1 = r) = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_0 = i)}{i+1} = \frac{P(Z_0 = n)}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

7. Pour établir $(\mathscr{R}_1)$, on prend $r = n$ dans l'égalité précédente :

$$P([Z_{k+1} = n]) = \sum_{i=n}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1} = \frac{P(Z_k = n)}{n+1}.$$

Ainsi on a bien pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{(\mathscr{R}_1) : \quad (n+1)P([Z_{k+1} = n]) = P([Z_k = n]).}$$

Prouvons maintenant la deuxième relation. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. On a :

$$(r+1)P(Z_{k+1} = r) - (r+1)P(Z_{k+1} = r+1) = (r+1)\left(\sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1} - \sum_{i=r+1}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1}\right)$$

$$\boxed{= (r+1)\frac{P(Z_k = r)}{r+1} = P(Z_r = r)}$$

D'où la relation $(\mathscr{R}_2)$.

8. On somme la relation $(\mathscr{R}_1)$ pour tous les entiers $k \in \mathbb{N}$. On obtient (tout converge par hypothèse) :

$$(n+1)\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_{k+1} = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = n) = S_n.$$

Ainsi, on a :

$$S_n = (n+1)\sum_{j=1}^{+\infty} P(Z_j = n) = (n+1)(S_n - P(Z_0 = n)) = (n+1)(S_n - 1).$$

D'où en résolvant $\boxed{S_n = \dfrac{n+1}{n}}$.

On suppose $n \geq 2$ dans la suite (pour pouvoir parler de S_{n-1}). On somme à présent les relations $(\mathscr{R}_2)$ pour tous les entiers $k \in \mathbb{N}$ (tout converge par hypothèse) :

$$(r+1)\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_{k+1} = r) - (r+1)\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_{k+1} = r+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$$

On obtient :

$$(r+1)\left[S_r - P(Z_0=r)\right] - (r+1)\left[S_{r+1} - P(Z_0=r+1)\right] = S_r \qquad (*)$$

Cette relation étant valable pour tout $r \in \{0,1,\dots,n-1\}$, on a pour $r=n-1$:

$$n\left[S_{n-1} - P(Z_0=n-1)\right] - n\left[S_n - P(Z_0=n)\right] = S_{n-1}$$

On en déduit donc, puisque $P(Z_0=n-1)=0$ et $P(Z_0=n)=1$ (car $Z_0=n$), que :

$$nS_{n-1} - n(S_n-1) = S_{n-1} \quad \Rightarrow \quad S_{n-1} = \frac{n}{n-1}(S_n-1).$$

Puisque $S_n = \dfrac{n+1}{n}$, on a finalement $\boxed{S_{n-1} = \dfrac{n}{n-1}\left(\dfrac{n+1}{n}-1\right) = \dfrac{1}{n-1}.}$

Montrons enfin que la suite $(rS_r)_{1\le r\le n-1}$ est constante. On reprend la relation $(*)$ valable pour tout $r \in \{0,\dots,n-1\}$. Pour $1 \le r \le n-2$, cette relation devient (puisqu'alors $P(Z_0=r)=P(Z_0=r+1)=0$ car $Z_0=n$) :

$$(r+1)S_r - (r+1)S_{r+1} = S_r \quad \text{soit encore} \quad rS_r = (r+1)S_{r+1}.$$

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (rS_r)_{1\le r\le n-1} \text{ est constante.}}$

Remarque. Ce n'était pas demandé, mais on obtient pour tout $r \in [\![1,n-1]\!]$:

$$rS_r = (n-1)S_{n-1} = 1 \quad \text{soit} \quad S_r = \frac{1}{r}.$$

9. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
(x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) &= (x-1)\sum_{r=1}^{n} rP(Z_{k+1}=r)x^{r-1} + \sum_{r=0}^{n} P(Z_{k+1}=r)x^r \\
&= \sum_{r=1}^{n} rP(Z_{k+1}=r)x^r - \sum_{r=1}^{n} rP(Z_{k+1}=r)x^{r-1} + \sum_{r=0}^{n} P(Z_{k+1}=r)x^r \\
&= \sum_{r=0}^{n} rP(Z_{k+1}=r)x^r - \sum_{r=0}^{n-1} (r+1)P(Z_{k+1}=r+1)x^r + \sum_{r=0}^{n} P(Z_{k+1}=r)x^r \\
&= \sum_{r=0}^{n-1} \left[rP(Z_{k+1}=r) - (r+1)P(Z_{k+1}=r+1) + P(Z_{k+1}=r)\right]x^r \\
&\quad + nP(Z_{k+1}=n)x^n + P(Z_{k+1}=n)x^n \\
&= \sum_{r=0}^{n-1} \left[(r+1)P(Z_{k+1}=r)x^r - (r+1)P(Z_{k+1}=r+1)\right]x^r \\
&\quad + (n+1)P(Z_{k+1}=n)x^n \\
&\underbrace{=}_{(\mathscr{R}_1) \text{ et } (\mathscr{R}_2)} \sum_{r=0}^{n-1} P(Z_k=r)x^r + P(Z_k=n)x^n = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k=r)x^r = F_k(x)
\end{aligned}$$

On obtient bien la relation suivante pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{(\mathcal{S}) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).}$$

10. (a) Notons tout d'abord que les variables aléatoires Z_k et $Z_k(Z_k-1)$ sont finies, donc elles possèdent bien une espérance.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction F_k est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en tant que polynôme. On peut donc la dériver deux fois. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$F_k'(x) = \sum_{r=1}^{n} rP(Z_k = r)x^{r-1}, \quad F_k''(x) = \sum_{r=2}^{n} r(r-1)P(Z_k = r)x^{r-2}.$$
Prenons $x = 1$ dans ces deux expressions :
$$F_k'(1) = \sum_{r=1}^{n} rP(Z_k = r) = \sum_{r=0}^{n} rP(Z_k = r),$$
$$F_k''(1) = \sum_{r=2}^{n} r(r-1)P(Z_k = r) = \sum_{r=0}^{n} r(r-1)P(Z_k = r).$$
On obtient par le théorème de transfert :
$$\boxed{E(Z_k) = F_k'(1)} \quad \text{et} \quad \boxed{E(Z_k(Z_k-1)) = F_k''(1)}.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a les relations suivantes, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$(\mathscr{S}) \ \ (x-1)F_{k+1}'(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x),$$
$$(\mathscr{S}') \ \ (x-1)F_{k+1}''(x) + 2F_{k+1}'(x) = F_k'(x),$$
$$(\mathscr{S}'') \ \ (x-1)F_{k+1}'''(x) + 3F_{k+1}''(x) = F_k''(x),$$
où les relations $(\mathscr{S}')$ et $(\mathscr{S}'')$ sont obtenues en dérivant $(\mathscr{S})$. Prenons alors $x = 1$ dans ces relations, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$(\mathscr{S}') \Rightarrow 2F_{k+1}'(1) = F_k'(1) \quad \text{et} \quad (\mathscr{S}'') \Rightarrow 3F_{k+1}''(1) = F_k''(1).$$
On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{F_{k+1}'(1) = \frac{1}{2}F_k'(1)}$ et $\boxed{F_{k+1}''(1) = \frac{1}{3}F_k''(1).}$

(c) Ce sont des suites géométriques de raison $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ respectivement. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$F_k'(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^k F_0'(1) \text{ et } F_k''(1) = \left(\frac{1}{3}\right)^k F_0''(1).$$
Or $F_0(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_0 = r)x^r = P(Z_0 = n)x^n = x^n$. Donc $F_0'(1) = n$ et $F_0''(1) = n(n-1)$. On obtient finalement :
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad F_k'(1) = \frac{n}{2^k} \quad \text{et} \quad F_k''(1) = \frac{n(n-1)}{3^k}.}$$
La variance $V(Z_k)$ de Z_k existe bien car Z_k est une variable aléatoire finie. On obtient en utilisant les calculs précédents que pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} V(Z_k) &= E(Z_k^2) - E(Z_k)^2 = E(Z_k(Z_k-1)) + E(Z_k) - E(Z_k)^2 \\ &= F_k''(1) + F_k'(1) - F_k'(1)^2 = \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \left(\frac{n}{2^k}\right)^2 \\ &= \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \frac{n^2}{4^k} \end{aligned}$$
On a donc finalement :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad E(Z_k) = \frac{n}{2^k} \quad \text{et} \quad \boxed{V(Z_k) = \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \frac{n^2}{4^k}}.$$

Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires

11. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F_k(x) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)x^r$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit avec les notations de l'énoncé :
$$\boxed{F_k = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)e_r.}$$
On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(F_k) = F_{k+1}$. Par une récurrence immédiate, on montre que :
$$F_k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}(F_0) = f^k(F_0).$$
Or $F_0(x) = x^n$ (car $Z_0 = n$ constante), donc on a bien finalement :
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ F_k = f^k(e_n).}$$

12. La famille $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ est libre en tant que famille de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ étagée en degrés. Elle est de plus de cardinal $n+1$ égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$. $\boxed{\text{C'est donc une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

13. Soit $r \in [\![0, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :
   - si $x \neq 1$,
$$f(u_r)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x (t-1)^r \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x-1}\left[\frac{(t-1)^{r+1}}{r+1}\right]_1^x = \frac{1}{x-1}\left[\frac{(x-1)^{r+1}}{r+1}\right] = \frac{u_r(x)}{r+1}$$
   - si $x = 1$,
$$f(u_r)(1) = u_r(1) = \begin{cases} 1 \text{ si } r = 0 \\ 0 \text{ si } r \neq 0 \end{cases} = \frac{u_r(1)}{r+1}.$$

Ainsi on a $\boxed{f(u_r) = \dfrac{u_r}{r+1} \text{ pour tout } r \in \{0, 1, \ldots, n\}.}$

Par le calcul précédent, u_r est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\dfrac{1}{r+1}$. Ainsi $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de f. Donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

14. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$e_n(x) = x^n = ((x-1)+1)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(x-1)^r 1^{n-r}$$
en appliquant la formule du binôme de Newton. On obtient donc $\boxed{e_n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}u_r}$. De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$,
$$u_r(x) = (x-1)^n = \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^{r-j}x^j.$$
On a donc : $\boxed{\forall r \in \{0, 1, \ldots, n\},\ u_r = \displaystyle\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}e_j.}$

15. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f^k(e_n) = f^k\left(\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}u_r\right) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}f^k(u_r) \quad \text{car } f \text{ est linéaire}$$

$$\boxed{= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{u_r}{(r+1)^k}} \quad \text{d'après la question 13. appliquée } k \text{ fois.}$$

D'où le résultat.

16. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. On a :

$$\begin{aligned} f^k(e_n) &= \sum_{r=0}^{n}\frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}u_r = \sum_{r=0}^{n}\frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}\left(\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}e_j\right) \quad \text{d'après la question 11.}\\ &= \sum_{r=0}^{n}\sum_{j=0}^{r}\left((-1)^{r-j}\frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}\right)e_j\\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{r=j}^{n}\left((-1)^{r-j}\frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}\right)e_j \quad \text{en permutant les sommes.}\end{aligned}$$

D'après la question 11 et le calcul précédent, on obtient donc :

$$f^k(e_n) = \sum_{r=0}^{n}P(Z_k = r)e_r \quad \text{et} \quad f^k(e_n) == \sum_{j=0}^{n}\sum_{r=j}^{n}\left((-1)^{r-j}\frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}\right)e_j.$$

Reste alors à identifier chacun des coefficients de ces deux expressions (l'écriture dans la base $(e_0, \dots, e_n)$ étant unique) :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall j \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n}(-1)^{r-j}\frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.}$$

17. (a) Soit $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} |P(Z_k = j)| &= \left|\sum_{r=j}^{n}(-1)^{r-j}\frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}\right| \leq \sum_{r=j}^{n}\left|(-1)^{r-j}\frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}\right| \quad \text{par inégalité triangulaire}\\ &\leq \sum_{r=j}^{n}\frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k} \leq \sum_{r=j}^{n}\frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(j+1)^k} \quad \text{car} \quad \frac{1}{r+1} \leq \frac{1}{j+1}\\ &\leq \frac{1}{(j+1)^k}\sum_{r=j}^{n}\binom{n}{r}\binom{r}{j}\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien pour tout $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ que :

$$\boxed{|P(Z_k = j)| \leq \frac{M_{j,n}}{(j+1)^k}}$$

avec $M_{j,n} = \sum_{r=j}^{n}\binom{n}{r}\binom{r}{j}$.

Soit $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. La série $\sum\limits_{k \geq 0} \dfrac{M_{j,n}}{(j+1)^k}$ est (à une constante $M_{j,n}$ près) une série géométrique de raison $-1 < \dfrac{1}{j+1} < 1$. Elle converge donc. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{k \geq 0} |P(Z_k = j)| \underbrace{=}_{P(Z_k=j)\geq 0} \sum\limits_{k \geq 0} P(Z_k = j) \text{ converge}}$ pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(b) On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(Z_k = 0) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{0}}{(r+1)^k} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} = 1 + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} |P(Z_k = 0) - 1| &= \left| \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \right| \\ &\leq \sum_{r=1}^{n} \left| (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \right| \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\ &\leq \sum_{r=1}^{n} \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \leq \sum_{r=1}^{n} \frac{\binom{n}{r}}{2^k} \quad \text{car } \frac{1}{r+1} \leq \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{1}{2^k} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \boxed{= \frac{C_n}{2^k}} \end{aligned}$$

où $C_n = \sum\limits_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = \sum\limits_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 1^r 1^{n-r} = 2^n$.

On a $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{C_n}{2^k} = 0$. Par théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{k \to +\infty} P(Z_k = 0)$ existe et vaut 1. $\boxed{\text{La série } \sum\limits_{k \geq 0} P(Z_k = 0) \text{ est donc grossièrement divergente.}}$

Remarque. On a montré que $\lim\limits_{k \to +\infty} P(Z_k = 0) = 1$. De plus, on a $Z_k(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$, et pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$0 \leq P(Z_k = j) \leq \sum_{i=1}^{n} P(Z_k = i) = 1 - P(Z_k = 0).$$

Par théorème des gendarmes, on a donc que $\lim\limits_{k \to +\infty} P(Z_k = j)$ existe et vaut 0.

Ainsi, la suite de variables aléatoires (Z_k) converge en loi vers la variable aléatoire constante égale à 0. Ceci ne devrait pas vous surprendre, car Z_k représente le numéro de la boule piochée au k-ème tirage. Étant donné le protocole et la composition des urnes, on a $Z_{k+1} \leq Z_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et si on tombe dans l'urne U_0 (c'est-à-dire s'il existe $r \geq 0$ tel que $Z_r = 0$), alors on ne peut plus en sortir vu le protocole suivi (et donc $Z_s = 0$ pour tout $s \geq r$).